ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.Г. Пудовкина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Учебное пособие

Челябинск
2007

ББК У.в6.я7
УДК 519.86(075.8)
П881

Одобрено
учебно-методической комиссией филиала ЮУрГУ в г. Миассе

Рецензенты:
Тихонов Н.Н., Федоров С.А.

Пудовкина, С.Г.
П881 Математическая экономика: учебное пособие/ С.Г. Пудовкина. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – 104 с.

Приведены базовые понятия финансовой математики и показаны примеры расчетов по ставкам простых и сложных процентов. Определены основные направления использования различных методов начисления процентов, приведены обобщающие характеристики потоков платежей. Рассмотрены условия доходности финансовых операций, в частности, с учетом инфляционных процессов. В пособии дано изложение основных экономических закономерностей функционирования производственно-сбытового предприятия и их применение для решения задач по оценке и анализе его деятельности. Рассмотрены основы теории построения статических и динамических моделей и методов прогнозирования показателей объемов производства и реализации, выручки, цены, прибыли и финансовой обеспеченности предприятия, производящего как один, так и несколько видов продукции. Приведены примеры решения задач по темам и перечень заданий для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Финансовая математика», «Математические методы и модели в экономике», «Математическая экономика», «Моделирование экономических систем и процессов», «Имитационное моделирование», «Анализ и оптимизация бизнес-процессов» и обучающихся по специальностям «Менеджмент организаций», «Экономика и управление на предприятии», «Финансы и кредит», «Прикладная информатика (в экономике)».

ББК У.в6.я7
УДК 519.86(075.8)

РАЗДЕЛ I. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

1. *Сущность и задачи финансовой математики*

Денежные суммы имеют свойство изменяться во времени. Люди берут кредиты (ссуды) и сами ссужают деньги. Для того, чтобы заинтересовать других людей ссудить необходимые деньги, им обязуются вернуть в будущем сумму, больше взятой. На этом основана теория процента.

Объектом исследования финансовой математики являются не только кредитные операции, но и другие операции с финансовыми средствами (ссудные операции, размещение средств в ценные бумаги, производственное инвестирование и т.п.). Потребность в них возникает всякий раз, когда осуществляется инвестирование средств тем или иным образом, и затем поступление дохода с этих средств.

В финансовых и коммерческих сделках суммы денег связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм (особенно в долгосрочных операциях). Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и выражается в виде принципа *неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени (time value of money).*

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает, когда при финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения следующих параметров: во-первых, стоимость (размеры платежей, долговых обязательств, кредитов и т.д.); во-вторых, время (даты и сроки выплат, продолжительность льготных периодов или отсрочки платежей и т.д.); и, в-третьих, процентная ставка.

Финансовая математика решает следующие задачи:

1. Определение конечных сумм денежных средств, находящихся во вкладах, займах, ценных бумагах путем начисления процентов;
2. Учет ценных бумаг;
3. Установление взаимосвязи между отдельными параметрами сделки, и определение параметров сделки исходя из заданных условий;
4. Определение эквивалентности параметров сделки для получения равной отдачи от затрат, произведенных различными способами;
5. Разработка планов выполнения финансовой операции;
6. Расчет показателей доходности финансовой операции;
7. Анализ последствий изменения условий операции;
8. Определение обобщающих характеристик и отдельных параметров денежных средств при рассмотрении их как финансовых потоков.

Области применения ФМ:

1. Финансово-кредитная сфера (банки, налоговые органы, фонды);
2. Сфера страхования;

3. Сфера инвестиций (при определении доходности капиталовложений);
4. Сфера пенсионного обеспечения;
5. Международные экономические отношения;
6. Бюджетная сфера;
7. Экспертные оценки в различных областях (например, экспертное прогнозирование модели износа оборудования, лизинговые операции).

2. Сущность процентов и процентных ставок

Финансовая математика рассматривает большинство операций, в которых увеличение первоначальной стоимости денежных средств происходит в результате предоставления их в долг и получения дохода.

Определение 2.1 *Первоначальная стоимость* (*P* или *PV – present value*) – стоимость капитала, ссуды, кредита и т.п. обычно на момент начала финансово-кредитной операции, после которого происходит изменение стоимости этих денежных средств. Первоначальную сумму также называют *инвестированной суммой.*

Определение 2.2 Под *наращенной (итоговой) суммой* (*S* или *FV – future value*) долга (ссуды, депозита и т.д.) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Определение 2.3 Абсолютная величина дохода, получаемая от предоставления денег в долг, называется *процентными деньгами* или *процентами (interest)* (*I*).

Таким образом, с одной стороны, процент – это плата за пользование заемными средствами, а с другой стороны (в более широком смысле) - это показатель доходности любого вложения капитала.

Определение 2.4 Отношение процентных денег, полученных за единицу времени к величине капитала (ссуды), называют *процентной ставкой (rate of interest)* (*i*). Она может быть выражена в процентах или в дробях (десятичных натуральных). Например, годовая процентная ставка равна 33% (или 0,33).

Определение 2.5 *Множителем наращения* (*M(n;i)*) является величина, которая показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Множитель наращения не зависит от величины первоначальной суммы, а только от срока кредитной операции и применяемой процентной ставки. Именно он характеризует доходность кредитной операции, позволяя определить, во что превратится единичная сумма к концу срока (или через любой промежуток времени).

Определение 2.6 Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют *периодом начисления* (*n* –если срок выражен в годах и *t*, если срок выражен в днях, месяцах и т.д., т.е. менее года).

Период начисления процентов, как правило, является отрезком времени между следующими друг за другом процедурами взимания процентов (например, при регулярном начислении процентов на вклады в сбербанках) или сроком финансовой операции, если проценты начисляются один раз (например, по условиям договора займа, в конце срока его действия).

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, и в этом случае в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда в проектном анализе при принятии инвестиционных решений предполагают, что проценты исчисляются непрерывно, то есть за сколь угодно малый промежуток времени. Тогда говорят о непрерывном начислении процентов.

Проценты могут выплачиваться кредитору по мере их начисления или присоединяются к сумме долга.

Определение 2.7 Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением* или *ростом* первоначальной суммы.

Определение 2.8 Проценты называются *обычными (декурсивными, postnumerando)*, если они начисляются в конце периода относительно исходной (первоначальной) величины средств.

Определение 2.9 Проценты называются *авансовыми (антисипативными, prenumerando)*, если они начисляются в начале периода предоставления денег относительно итоговой (конечной) величины средств.

В мировой практике чаще всего используют декурсивный способ исчисления процентов как наиболее удобный и понятный при расчетах между кредитором и заемщиком.

3. Наращение по простой ставке процентов

В зависимости от выбора исходной базы (суммы) для вычисления процентов, говорят о *простых процентах*, которые в течение всего срока обязательства рассчитываются на первоначальную сумму долга, и о *сложных процентах*, база для расчета которых постоянно меняется за счет присоединения к первоначальной сумме начисленных ранее процентов.

Поскольку сроки финансовых операций меняются в широком диапазоне (от нескольких дней до нескольких десятков лет), то для сравнения условий различных операций процентная ставка может быть приведена к некоторому базовому периоду, например, к году. В этом случае говорят о годовой процентной ставке i, а число периодов наращения *n*, соотнесенное с i, выражают в годах.

Начисленные проценты за один период равны $P \cdot i = I_1$, а за n периодов – $P \cdot i \cdot n = I_n$.

Процесс наращения по правилам простых процентов выглядит как арифметическая прогрессия:

$$P,\ P + P \cdot i,\ P + P \cdot i + P \cdot i = P \cdot (1 + 2 \cdot i), ...,\quad P \cdot (1 + n \cdot i),$$

где первый член прогрессии равен первоначальной сумме *P*,а разность – это величина $P \cdot i$. Отсюда формула простых процентов выглядит следующим образом:

$$S = P + I = P \cdot (1 + n \cdot i). \tag{3.1}$$

Отсюда множитель наращения простых процентов вычисляется по формуле:

$$(1+n\cdot i)=\frac{S}{P}. \qquad (3.2)$$

Пример 3.1 Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 10 млн. руб., срок долга 2 года при ставке простых процентов 28% годовых.

Решение: Проценты за два года вычисляются по формуле:

$I=P\cdot n\cdot i=10\cdot 2\cdot 0{,}28=5{,}6$ млн. руб., следовательно, наращенная сумма рана:

$S=P+I=10+5{,}6=15{,}6$ млн. руб.

Но такого рода вычисления встречаются редко, так как часто срок операции бывает выражен не в годах, а в днях или в месяцах. В то же время процентная ставка обычно соотносится с годовым периодом, поэтому приходится переводить срок операции в доли от года. Для этого используются следующие обозначения:

t (*time)* – срок операции (день, месяц, квартал);

Y (*year)* – уравнивающий знаменатель, который выражается в тех же единицах, что и *t* (день, месяц, квартал).

Отношение $\frac{t}{Y}$ подставим в формулу (3.1):

$$S=P(1+n\cdot i)=P\cdot\left(1+\frac{t}{Y}\cdot i\right) \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) используется:

1. При обслуживании вкладов до востребования для определения абсолютной величины процентов и наращенной суммы;
2. При обслуживании текущих счетов;
3. При расчете суммы долга, когда срок операции согласно условиям договора менее года, и долг гасится единовременным платежом;
4. При замене и консолидации платежей;
5. При расчете размеров процентных платежей, когда требуется составить план погашения задолженности.

Заметим, что *t* и *Y* в случае измерения их в днях могут быть выражены точно и приближенно (табл.3.1).

Таблица 3.1. Варианты измерения *t* и *Y*

Показатель Измерение	*t*	*Y*
Точное	Фактическое число дней в месяце (январь – 31, февраль – 28 или 29, март – 31 и т.д.)	Фактическое число дней в году (365 или 366)
Приближенное	Число дней во всех месяцах принимают равным 30	Продолжительность года 360 дней.

Итак, имеются три варианта расчета:

1. t и Y измерены точно. Этот вариант дает самые точные результаты. (Используется многими крупными коммерческими банками, например, в Великобритании). Чтобы определить t пользуются специальной таблицей порядковых номеров дней в году и из номера дня окончания операции вычитают день ее начала (если день выдачи и день погашения ссуды считаются за 1).
2. t измерено точно, а Y – приближенно. Этот вариант используется для расчетов обыкновенных (коммерческих) процентов. Он дает несколько больший результат, чем точные проценты с точным числом дней ссуды. Вероятно поэтому он более предпочтителен для кредитора, и по такому принципу ведутся все банковские операции в России.
3. t и Y измерены приближенно. Этот способ применяется для вычисления обыкновенных (коммерческих) процентов с приближенным сроком операции и принят в практике банков Германии. У нас он используется при некоторых видах расчетов с населением (например, при исчислении процентов за просрочку платежа по коммунальным услугам).

Пример 3.2 Ссуда в размере 50 тыс. руб. выдана 25 мая по 1 сентября под 24% годовых, год не високосный. Найти подлежащую возврату сумму.
Решение. Используем таблицы с порядковыми номерами дней года, считая за один день выдачи ссуды и день ее погашения.
1) Точные проценты с точным числом дней ссуды.
25 мая – 145-й день в году, 1 сентября – 244-й день в году. Число дней ссуды: 244−145=99.
Сумма, подлежащая возврату:

$$S_1 = 50 \cdot \left(1 + \frac{99}{365} \cdot 0{,}24\right) = 53{,}255 \text{ тыс. руб.}$$

2) Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.
Сумма, подлежащая возврату:

$$S_2 = 50 \cdot \left(1 + \frac{99}{360} \cdot 0{,}24\right) = 53{,}300 \text{ тыс. руб.}$$

3) Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.
С 25 мая по 1 сентября прошло: 5+30+30+30=95 дней.
Сумма, подлежащая возврату:

$$S_3 = 50 \cdot \left(1 + \frac{95}{360} \cdot 0{,}24\right) = 53{,}167 \text{ тыс. руб.}$$

4. Наращение процентов в потребительском кредите

При расчетах за товары и услуги, например, между двумя юридическими лицами, или между покупателем и продавцом в магазине, может быть использована такая форма оплаты за покупку в кредит как *потребительский* *кредит*. То есть имеет место разрыв во времени (иногда значительный) между передачей товара (предоставлением услуги) и последующей оплаты в рассрочку в течение некоторого времени. Как правило, в таких случаях простые проценты начисляются на всю сумму потребительского кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент выдачи кредита (*flat rate of interest, add-on interest*). Погашение долга с процентами производится частями, равномерно на протяжении всего срока кредита.

То есть наращенная сумма долга равна $S = P(1 + n \cdot i)$, а сумма разового погасительного платежа:

$$q = \frac{S}{m \cdot n}, \tag{4.1}$$

где n – срок кредита в годах, а m – число погасительных платежей в году, если срок кредита меньше года, то формула (4.1) принимает вид:

$$q = \frac{S}{m} = P \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{m}. \tag{4.2}$$

Поскольку проценты начисляются на первоначальную сумму долга, а фактическая сумма долга систематически уменьшается во времени, то реальная процентная ставка (по фактически использованному кредиту) оказывается заметно выше, чем ставка по условию договора, то есть реально кредитор выигрывает больше.

Пример 4.1 На покупку товара открыт кредит на сумму 9000 руб. сроком на 6 месяцев, процентная ставка 25% годовых, погашение в конце каждого месяца. Первоначально покупатель должен оплатить не менее 1/3 цены товара. Найти размер погасительного платежа q.

Решение. По условию задачи срок кредита приведен не в годах, а в месяцах (6 месяцев или 0,5 года), сумма, оставшаяся после обязательной уплаты 1/3 цены товара при покупке равна $9000 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 6000$ руб. Следовательно, ежемесячный погасительный платеж равен: $q = \frac{6000 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}25)}{6} = \frac{6750}{6} = 1125$ руб. То есть фактически покупатель заплатил за товар: $3000 + 1125 \cdot 6 = 9750$ руб.

Способы погашения при потребительском кредите

Пусть P=10 тыс. руб.
n=5
i=0,1

1 способ: $q = \frac{10 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 5)}{5} = \frac{15}{3} = 3$ тыс. руб.

2 способ: Составление схемы погашения

$10:5=2$ тыс. руб. размер разового платежа погашения основного долга.

$q_1 = 2 + 10 \cdot 0{,}1 = 3;$

$q_2 = 2 + 8 \cdot 0{,}1 = 2{,}8;$

$q_3 = 2 + 6 \cdot 0{,}1 = 2{,}6;$

$q_4 = 2 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}4;$

$q_5 = 2 + 2 \cdot 0{,}1 = 2{,}2.$

Процентные деньги в этом случае:

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0{,}1 \cdot (10 + 8 + 6 + 4 + 2).$

Общий вид формулы:

$$q_1 = \frac{P}{n} + P \cdot i = \frac{P}{n} + I_1;$$

$$q_2 = \frac{P}{n} + \left(P - \frac{P}{n}\right) \cdot i = \frac{P}{n} + P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{P}{n} + I_2;$$

$$q_3 = \frac{P}{n} + P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{P}{n} + I_3;$$

$$q_4 = \frac{P}{n} + P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) = \frac{P}{n} + I_4;$$

$$q_5 = \frac{P}{n} + P \cdot i \cdot \left(1 - \frac{4}{n}\right) = \frac{P}{n} + I_5.$$

Расчет процентных денег при простом способе:

$$I = P \cdot i \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \left(1 - \frac{4}{n}\right)\right].$$

Общий вид формулы для процентных денег:

$$I = P \cdot i \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]. \tag{4.3}$$

В скобках формулы (4.3) сумма членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и последним членом $a_n = 1 - \frac{n-1}{n}$.

Сумма n членов арифметической прогрессии, выражающей всю сумму погашаемого долга вместе с начисленными процентами за весь срок кредита в общем виде равна:

$$S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2} \cdot \left(1 + 1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot n - n + 1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}, \tag{4.4}$$

тогда

$$I_{общ} = P \cdot i \cdot \frac{n+1}{2}. \tag{4.5}$$

5. *Математическое дисконтирование и банковский учет по простым ставкам*

При разработке различного вида финансовых операций прибегают к решению задачи, обратной к задаче определения наращенной суммы: какую сумму P надо инвестировать сегодня, чтобы через определенный интервал времени n получить заданное значение S. С такой постановкой вопроса сталкиваются, например:

- когда нужно разработать условия контракта и определить параметры сделки;
- когда проценты с суммы S удерживаются непосредственно при выдаче ссуды или кредита;
- когда банк покупает вексель, срок оплаты по которому наступает в будущем.

Тогда говорят, что сумма S *дисконтируется*, сам процесс называется *учетом*, а проценты в виде разницы $S-P=D$ – *дисконтом* (термин "дисконт" в общем смысле означает скидку с цены долгового обязательства при авансированной выплате процентов за пользование кредитом). Процессы дисконтирования и наращения взаимно обратные.

Термины "наращение" и "дисконтирование" употребляются и в более широком смысле, как средства определения любой стоимостной величины на некоторый произвольный момент времени вне зависимости от конкретного вида финансовой операции, предусматривающей начисление процентов. Такой расчет часто называют *приведением* стоимостного показателя к заданному моменту времени. В этих расчетах P называют *современной* или *приведенной* величиной суммы S. Наращенная, или будущая стоимость денежной суммы означает проекцию заданной в настоящий момент времени суммы на определенный интервал времени вперед, в будущее. Дисконтирование – проекцию суммы, заданной в некоторый момент времени в будущем, на определенный интервал времени назад, в настоящее (рис 5.1. и 5.2.).

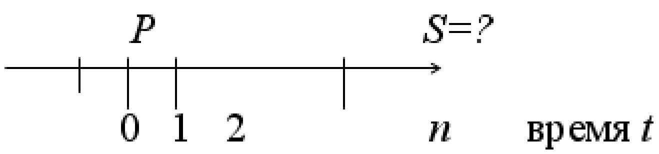

Рис. 5.1. Наращение с течением времени.

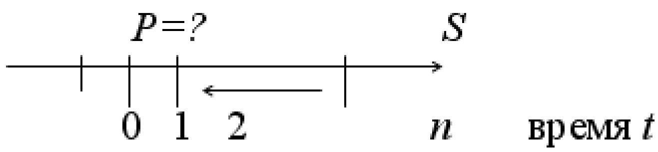

Рис. 5.2. Дисконтирование с течением времени.

Привести стоимость денег можно к любому нужному моменту времени, а не обязательно к началу финансовой операции.

Исходя из вида ставки, говорят о *математическом дисконтировании* и *банковском учете.*

Математическое дисконтирование

Задача в этом случае формулируется следующим образом: Какую первоначальную сумму нужно выдать в долг, чтобы при начислении на нее процентов по ставке i к концу срока получить S.

Решаем уравнение (3.1) относительно P:

$$P = S \cdot \frac{1}{1 + n \cdot i}, \tag{5.1}$$

где $n = \frac{t}{Y}$,

а $\frac{1}{1 + n \cdot i}$ – *дисконтный множитель* за период n, (5.2)

который показывает, какую долю составляет P в величине S.

$D = S - P$ – дисконт, как величина процентов, начисленных на P, и как дисконт суммы S, то есть суммы I и D равны, а экономический смысл различен.

Пример 5.1 Через 200 дней с момента подписания контракта должник уплатит 35 тыс. руб. Кредит предоставлен под 25% годовых. Определить, какую сумму получит должник и сумму дисконта. Временная база равна 365 дней.

Решение. Первоначальная сумма, выданная в долг, вычисляется по формуле (5.1) $P = \frac{S}{1 + \frac{t}{Y} \cdot i} = \frac{35}{1 + \frac{200}{365} \cdot 0{,}25} = 30{,}783$ тыс. руб. Отсюда дисконт равен: $D = S - P = 35 - 30{,}783 = 4{,}217$ тыс. руб.

Банковский учет (учет векселей)

На практике чаще используется так называемый коммерческий учет (банковское дисконтирование). Суть операции состоит в том, что банк или какое-либо иное финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока (S), то есть приобретает его с дисконтом. В дальнейшем при наступлении срока платежа по векселю банк предъявляет вексель тому, кто его выписал, и получает сумму S. Такой вексель, который допускает участие третьих лиц, называется *переводным* или *траттой.* Таким образом, реализовывается дисконт и извлекается собственная выгода для банка или другого кредитного учреждения: учитывал по меньшей сумме, а получил больше. Владелец векселя получил деньги ранее указанного в векселе срока, хоть и в меньшем размере. То есть, в этом случае исходной величиной выступает не начальная сумма *P*, а некоторая будущая сумма *S*.

По определению (2.4): $i = \frac{(S-P)}{P} = \frac{I}{P}$, а простая годовая учетная ставка –

$$d = \frac{S-P}{S} = \frac{D}{S}. \qquad (5.3)$$

Размер дисконта (или учета), удерживаемого банком, равен $S \cdot n \cdot d$. Отсюда

$$P = S - D = S - S \cdot n \cdot d = S \cdot (1 - n \cdot d), \qquad (5.4)$$

где n – продолжительность срока в годах от момента учета до даты уплаты по векселю, а

$$(1 - n \cdot d) \text{ – \textit{дисконтный множитель}} \qquad (5.5)$$

Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дней, а число дней в периоде обычно берется точным.

<u>**Пример 5.2**</u> Дата погашения дисконтного векселя 30 апреля. Какова его выкупная цена и дисконт на 2 апреля, если его номинал – 200 тыс. руб., а учетная ставка 40% годовых. Определить годовую доходность операции по простой ставке.

Решение. Номиналом векселя называется нарицательная величина, указываемая на векселе (т.е. наращенная сумма). По условиям задачи – это *S*=200 тыс. руб. Число дней, прошедших от момента учета векселя до даты уплаты по нему – 28, так как считаем за один день погашения и день уплаты по векселю.

$$P = S \cdot \left(1 - \frac{t}{Y} \cdot d\right) = 200 \cdot \left(1 - \frac{28}{360} \cdot 0{,}4\right) = 193{,}778 \text{ тыс. руб.}$$

Годовую доходность для банка, учитывающего вексель, можно вычислить, выведя i из формулы (3.2):

$$i = \frac{(S-P) \cdot Y}{P \cdot t} = \frac{(200 - 193{,}778) \cdot 360}{193{,}778 \cdot 28} = 0{,}4128 \text{ или } 41{,}3\%.$$

Сравнивая эту ставку со ставками доходности от альтернативных вложений, банк может оценить целесообразность проведения подобной операции.

Рассмотренные два метода дисконтирования – по ставке i и d приводят к разным результатам. Учетная ставка отражает фактор времени более "жестко". Действительно, сравним формулы (5.1) и (5.4). В формуле (5.4) уже при $n \geq \frac{1}{d}$ величина *P* станет отрицательной, что лишено смысла. То есть при относительно большом сроке уплаты по векселю и высокой учетной ставке дисконт может привести к нулевой и даже отрицательной сумме *P*. Например, при *d*=0,2 (20% в год) и пятилетнем сроке уже видно, что сторона, учитывающая вексель, не получит по нему ничего. Такая ситуация невозможна при математическом дисконтировании. В таблице 5.1 приведены дисконтные множители, рассчитанные для одного и того же значения простой ставки процентов и учетной ставка.

Таблица 5.1. Дисконтные множители ($i = d = 40\%$).

Вид ставки	n (в годах)			
	¼	½	1	2 ½
i	0,90909	0,83333	0,71428	0,5
d	0,9	0,8	0,6	0

В итоге можно отметить, что такой известный инструмент денежно-кредитной политики, как учетная ставка Центрального банка РФ, используется в большинстве случаев не столько для переучета векселей коммерческих банков, сколько для взыскания с них процентных платежей по предоставленным ссудам. Подобная практика использования учетной ставки, существующая во многих странах, сложилась исторически.

6. Переменные ставки реинвестирования

До сих пор имелось в виду, что ни база для исчисления процентов, ни ставка процентов за весь период действия ссудного (кредитного) договора не менялись. В действительности, в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + ...) = P \cdot \left(1 + \sum_t n_t \cdot i_t \right), \qquad (6.1)$$

где i_t, n_t – ставка простых процентов и продолжительность периода ее начисления в периоде.

Пример 6.1 Согласно условиям контракта начисление процентов за пользование ссудой происходит по следующей схеме: первый год – 29%, в каждом следующем квартале ставка повышается на 1%. Определить, во сколько раз увеличится первоначальная сумма за 2 года.

Решение. Определим множитель наращения, определив период длиною в квартал как 0,25 года: $1 + \sum_{t=1}^{m} n_t \cdot i_t = 1 + 0{,}29 + 0{,}25 \cdot 0{,}30 + 0{,}25 \cdot 0{,}31 +$

$$+ 0{,}25 \cdot 0{,}32 + 0{,}25 \cdot 0{,}33 = 1{,}605.$$

Первоначальная сумма увеличится в 1,605 раза.

На практике, особенно при инвестировании средств в краткосрочные депозиты (денежные средства и ценные бумаги, переданные на хранение в кредитные учреждения, или используемые в качестве платежей для обеспечения требуемой оплаты) по простой процентной ставке, иногда прибегают к неоднократному повторению операции инвестирования в пределах заданного срока N, то есть к дальнейшему *реинвестированию* наращенных на каждом шаге операции средств. В этом случае наращенная сумма за весь срок операции составит величину:

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot \ldots, \tag{6.2}$$

где $n_1,\ n_2, \ldots$ – продолжительность периодов наращения, и $\sum_{t=1}^{m} n_t = N$, а $i_1,\ i_2, \ldots$ – ставки, по которым производится реинвестирование.

Если периоды начисления равны, то:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i)^m, \tag{6.3}$$

где m – общее число операций реинвестирования.

<u>Пример 6.2</u> Согласно условиям договора, в течение первых 3 месяцев 2000 года на сумму в 20 тыс. руб. начисляются простые проценты по ставке 36% годовых. Какую сумму получит кредитор по истечении срока операции.

Решение. Будем считать, что используется практика начисления точных процентов с точным числом дней ссуды (366 дней в 2000 году, в феврале – 29дней). Тогда наращенная сумма, полученная кредитором по завершению операции равна:

$$S = P \cdot (1 + n_1 \cdot i_1) \cdot (1 + n_2 \cdot i_2) \cdot (1 + n_3 \cdot i_3) =$$

$$= 20 \cdot \left(1 + \frac{31}{366} \cdot 0{,}36\right) \cdot \left(1 + \frac{29}{366} \cdot 0{,}36\right) \times \left(1 + \frac{31}{366} \cdot 0{,}36\right) = 21{,}844\ .$$

Близкий результат можно получить и при вычислениях по методу обыкновенных процентов с приближенным числом дней (по 30 дней в месяце) по формуле (6.3):

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i)^m = 20 \cdot (1 + \frac{30}{366} \cdot 0{,}36)^3 = 21{,}823 \text{ тыс. руб.}$$

7. Определение продолжительности ссуды и уровня процентной ставки

При разработке и анализе условий финансовых контрактов, при планировании кредитования и т.п. часто возникает необходимость в определении срока контракта или определении процентной ставки при всех прочих заданных условиях, т.е. при известных значениях первоначальной и наращенной сумм, или, что то же самое, при известной величине множителя наращения за срок контракта. Необходимые величины можно легко найти из ранее выведенных формул предыдущих лекций.

Решаем уравнения (3.1) и (6.1) относительно i и d :

1. Срок ссуды (контракта) в годах из выражения (3.1):

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i}. \tag{7.1}$$

2. Срок ссуды (контракта) в годах из выражения (6.1):

$$n = \frac{S - P}{S \cdot d}. \tag{7.2}$$

Если срок ссуды выражен в днях, то выражения (7.1) и (7.2) принимают вид при использовании простой процентной ставки

$$t = \frac{S - P}{P \cdot i} \cdot Y, \tag{7.3}$$

и при использовании учетной ставки

$$t = \frac{S - P}{S \cdot d} \cdot Y. \tag{7.4}$$

Пример 7.1 Определить срок ссуды в днях, за который долг, равный 100 тыс. руб. вырастет до 125 тыс. руб., если используется: а) простая процентная ставка 40% годовых; б) простая учетная ставка 40%. Число дней в году принимается за 365.

Решение. Находим продолжительность ссуды в долях года по формуле (7.1) и (7.2):

а) $n = \frac{125 - 100}{100 \cdot 0{,}4} = 0{,}625$. Срок в днях получим умножением этой величины на количество дней в году: $0{,}625 \cdot 365 = 228{,}12 \approx 228$ дней.

б) $n = \frac{125 - 100}{125 \cdot 0{,}4} = 0{,}5$. Срок в днях для этой ставки: $0{,}5 \cdot 365 = 182{,}5 \approx 182$ дня.

Иногда при сравнении контрактов по степени разнородности возникает необходимость определения уровня процентной ставки по заданным условиям сделки, особенно, когда процентные ставки в явном виде не указаны. Чтобы определить доходность операции (вычислить величины i и d), решаются уравнения (3.1) и (7.2) относительно процентной и учетной ставок.

8. *Сложные проценты*

Если проценты в конце каждого периода начисления не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме, и полученная величина становиться исходной для начисления процентов в следующем периоде, то размер наращенной к концу срока суммы определяется по закону сложных процентов. Другими словами, говорят о *начислении процентов на проценты*. При этом процедуру присоединения начисленных процентов называют *реинвестированием* или *капитализацией*. Чаще всего такую процедуру применяют в случаях, когда проценты составляют заметную долю первоначальной суммы. При капитализации рост первоначальной суммы P производится с ускорением, дискретно (скачками), в конце каждого периода начисления процентов.

Если простые проценты применяются в основном в краткосрочных операциях, то сложные в средне- и долгосрочных операциях, а также при неоднократном учете ценных бумаг, при определении арендной платы при лизинговом обслуживании, при определении изменения стоимости денег под влиянием инфляции и др.

Наращение по ставке сложных процентов следует по законам геометрической прогрессии. Воспользуемся этим для нахождения формулы для расчета наращенной суммы при условии, что проценты капитализируются раз в год.

Так, в конце первого года (периода) наращенная сумма $S_1 = P + P \cdot i = P \cdot (1+i)$, в конце второго года $S_2 = P \cdot (1+i) + P \cdot (1+i) \cdot i =$ $= P \cdot (1+i)^2$ и т.д. Таким образом, к концу n-го года наращенная сумма составит величину

$$S = P \cdot (1+i)^n, \tag{8.1}$$

$$I = S - P = P \cdot [(1+i)^n - 1], \tag{8.2}$$

где n – количество лет (периодов) начисления процентов.

Итак, мы получили геометрическую прогрессию с первым членом P и знаменателем $(1+i)$. Члены прогрессии P, $P \cdot (1+i)$, $P \cdot (1+i)^2, \ldots P \cdot (1+i)^n$. При этом

$$(1+i)^n \text{ – множитель наращения.} \tag{8.3}$$

__Пример 8.1__ В какую сумму обратится долг, равный 10 тыс. руб. через 5 лет при росте по сложной ставке 25,5%?

Решение. Используем формулу (8.1) для нахождения наращенной суммы:

$S = P \cdot (1+i)^n = 10000 \cdot (1+0{,}055)^5 = 10000 \cdot 1{,}30696 = 13069{,}6$ руб.

Величину множителя наращения можно получить и по таблице:

$M(n;i) = M(5;5{,}5) = 1{,}306960006$.

Пусть теперь срок ссуды превышает 50лет, например, $n = 52$ года. В этом случае можно опять воспользоваться таблицей, находя значения величин $1{,}055^{50} = 14{,}54196$ и $1{,}055^2 = 1{,}11302$.

Тогда $S = 10000 \cdot 1{,}055^{52} = 10000 \cdot 1{,}055^{50} \cdot 1{,}055^2 =$

$= 10000 \cdot 14{,}54196 \cdot 1{,}11302 = 16185{,}66$ руб.

Сравнение силы роста простых и сложных процентов

При одной и той же ставке i наращение сложных процентов идет быстрее, чем простых при сроке наращения больше единичного (например, года), и медленнее, если период наращения менее единичного. Поясним это высказывание для множителей наращения с помощью формул:

Если $n > 1$, то $(1+i)^n > (1+n \cdot i)$; если $0 < n < 1$, то $(1+i)^n < (1+n \cdot i)$.

Или продемонстрируем на рисунке 8.1.

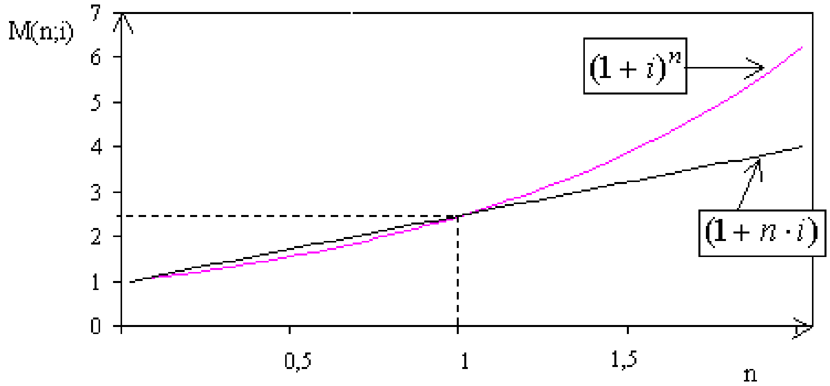

Рис. 8.1 Сравнение силы роста простых
и сложных процентов.

Начисление годовых процентов при дробном числе лет

В случаях, когда n не является целым числом, то есть состоит из целой и дробной частей, наращение определяется двумя способами:

1. По формуле (8.1): $S = P \cdot (1+i)^n$;

2. На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное число лет – простые:

$$S = P \cdot (1+i)^a \cdot (1+b \cdot i), \tag{8.4}$$

где $n = a + b$, a – целое число лет, b – дробная часть года.

<u>Пример 8.2</u> Кредит в размере 30 тыс. руб. выдан на срок 3 года и 160 дней. Ставка 26,5% годовых. По контракту предусмотрен смешанный метод расчета. Определить сумму долга в конце срока.

Решение.

1. Определим наращенную сумму по формуле (8.4):

$$S = 30000 \cdot (1+0{,}265)^3 \cdot \left(1 + \frac{160}{365} \cdot 0{,}265\right) =$$

$$= 30000 \cdot 2{,}02428 \cdot 1{,}11616 = 67782{,}61 \text{ руб.}$$

2. Определим наращенную сумму по формуле (8.1):

$$S = 30000 \cdot 1{,}265^3 \cdot 1{,}265^{\frac{160}{365}} = 30000 \cdot 2{,}02428 \cdot 1{,}10854 = 67319{,}86 \text{ руб.}$$

На практике ряда коммерческих банков предусматривается, что проценты начисляются только за полные истекшие периоды, а за отрезки времени меньше, чем периоды начисления, проценты не начисляются.

9. Номинальная и эффективные ставки процентов

В современных условиях проценты, как правило, капитализируются не один, а несколько раз в год – по полугодиям, кварталам и т.д. В этом случае для наращения можно воспользоваться формулой (8.1), в которой n теперь означает общее число периодов роста, а i – процентная ставка за соответствующий период.

Предположим, что по требованию некоторых клиентов банк начисляет им проценты ежеквартально, хотя в договоре указана годовая процентная ставка $i = 12\%$. Если начислять проценты ежеквартально (m=4) по ставке 12:4=3% по схеме сложных процентов, то за год получим $S = P \cdot (1 + 0{,}03)^4 = 1{,}126 \cdot P$, или по таблице $M(4;3) = 1{,}126$. Ставка $f = 12{,}6\%$ называется *эффективной*, а объявленная ставка 12% - *номинальной,* которую в случае m- разового начисления процентов в году будем обозначать j (в общем случае $i = {}^{j}\!/_{m}$ и при m=1 $i = j$). Так как ставка получилась больше, чем в договоре, то банк так делать не будет. Хорошим выходом в данной ситуации будет решение о начислении ежеквартально простых процентов по ставке 3%.

В общем случае *номинальной* называется процентная ставка, используемая для расчетов, для фиксирования в договорах, а действительная ставка, которая при этом получается, называется *эффективной.*

Пусть номинальная годовая ставка есть j, а сложные проценты начисляются m раз в год по ставке ${}^{j}\!/_{m}$. Тогда эффективная годовая ставка f рассчитывается из уравнения:

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = 1 + f,$$

которое отражает равенство множителей наращения простой процентной ставки f и сложной процентной ставки j. Отсюда

$$f = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1, \qquad (9.1),$$

где m – количество периодов начисления в году.

Итак, эффективная ставка дает возможность увидеть, какая годовая ставка простых процентов позволит достичь такого же финансового результата, что и m-разовое наращение в год по ставке $\frac{j}{m}$.

Пример 9.1 Определить эффективные процентные ставки для случая наращения вклада, если номинальная годовая процентная ставка не зависит от числа периодов начисления в году и составляет 50%, а начисление процентов производится: а) раз в год; б) раз в квартал; в) раз в месяц.

Решение. Воспользуемся формулой (9.1) для нахождения эффективной процентной ставки:

а) $f = j = 0{,}5$ или 50%;

б) $f = \left(1 + \dfrac{0{,}5}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}60181$ или 60,18%;

в) $f = \left(1 + \dfrac{0{,}5}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}63209$ или 63,21%.

Из примера видно, что, несмотря на одну и ту же номинальную процентную ставку, эффективные ставки для различного количества периодов начисления процентов в году разные. При использовании одинаковой процентной ставки сумма наращения будет тем больше, чем чаще происходит капитализация.

Отсюда можно вывести правило для определения на практике наиболее выгодных условий для заключения контрактов и расчета годовых номинальных ставок для периодов начисления, отличных от года: «Два финансовых контракта считаются эквивалентными (имеющими одинаковую доходность), если соответствующие им эффективные ставки совпадают».

Наращенная сумма при внутригодовой капитализации

Обычно в финансовых контрактах фиксируется годовая процентная ставка и периодичность начисления процентов: раз в полгода, ежеквартально, ежемесячно и т.д. Если период начисления процентов не равен году, то, как рассматривалось ранее, годовая ставка называется номинальной, а процентная ставка за период начисления равна отношению номинальной ставки к числу периодов в году. Тогда процесс наращения называется внутригодовой капитализацией. Наращенная сумма в этом случае определяется по формуле:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

или

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot \frac{t}{Y}}, \tag{9.4}$$

где j/m – ставка за период, исчисленная на основе базовой (номинальной ставки j) и числа раз начисления процентов в году (m); $m \cdot n$ – число процентных периодов, исчисленных на основе числа раз начисления процентов в году (m) и срока финансовой операции (n) в годах, или (t/Y) – если не в годах.

Пример 9.3 Пусть во вклад с капитализацией процентов помещены 10 млн. руб. Определить наращение суммы вкладов через 2 года, если проценты начисляются: а) ежеквартально из расчета 80% годовых; б) ежемесячно; в) два раза в год.

Решение. Определим требуемые наращенные суммы, используя формулу (9.2):

а) $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = 10 \cdot \left(1 + \frac{0{,}8}{4}\right)^{4 \cdot 2} = 42{,}99816$ млн. руб.;

б) $S = 10 \cdot \left(1 + \frac{0{,}8}{12}\right)^{2 \cdot 12} = 47{,}06405$ млн. руб.;

в) $S = 10 \cdot \left(1 + \frac{0{,}8}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 38{,}416$ млн. руб.

При одной и той же номинальной ставке процентов, но разной частоте начислений проценты отличаются. С увеличением количества начислений процентов в году абсолютный годовой доход возрастает. По этой причине номинальная процентная ставка не может служить универсальным измерителем финансовых операций.

10. Непрерывное наращение процентов

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, то есть наращения за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко. Бóльшее значение эти расчеты имеют в количественном финансово-экономическом анализе сложных экономических процессов и систем, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений. Необходимость в применении непрерывного наращения (или непрерывных процессов) определяется прежде всего тем, что многие экономические явления по своей природе непрерывны и аналитическое описание с помощью непрерывных процессов более адекватно, чем на основе дискретных.

Наращенная сумма при дискретных процентах находится $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$.

Увеличение частоты начислений процентов при фиксированном значении номинальной процентной ставки j приводит к росту годового множителя наращения, а, следовательно, и к росту суммы S, которая при $m \to \infty$ рассчитывается: $S = \lim\limits_{m \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = P \lim\limits_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}\right]^{n}$.

Известно, что $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, ($e$-основание натуральных логарифмов и $e \approx 2{,}71$). Следовательно, в нашем случае $\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = e^{j}$. Отсюда множитель наращения равен e^{j}, а наращенная сумма определяется по формуле $S = P \cdot e^{jn}$.

Итак, при непрерывной капитализации процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и номинальной ставки процентов. Для того чтобы отличить ставки непрерывных процентов от ставки дискретных процентов, первую обозначают через δ (дельта). При непрерывном наращении применяют особый вид процентной ставки – *силу роста (force of interest).*

Определение 10.1 Предел δ номинальной ставки j при $m \to \infty$ называется *силой роста* или *интенсивностью наращения* за год при непрерывном начислении процентов.. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени. Она может быть постоянной или меняться во времени.

Величину δ можно также назвать номинальной годовой ставкой при непрерывном начислении процентов.

Тогда

$$S = P \cdot e^{\delta n}. \qquad (10.1)$$

Если переходить к все более частому начислению процентов при фиксированной годовой норме доходности, то эквивалентная ей номинальная ставка (при m-кратном начислении процентов будет стремиться к величине $\delta \equiv \ln(1 + f)$. Смысл названия «сила роста» становится ясен, если продифференцировать по времени выражение $S = P \cdot e^{\delta n} = P \cdot e^{\delta t}$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = P \cdot \delta \cdot e^{\delta t}$$

или, отсюда

$\delta = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t}$ – мгновенная скорость относительного роста инвестирования капитала S.

Множитель наращения $e^{\delta n}$ рассчитывают с помощью калькулятора, находят по таблицам e^{x} или e^{δ} находят, используя разложение ряда

$e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + ...$ Достаточно бывает ограничиться 3-5 членами ряда, так как δ обычно бывает меньше 1.

Пример 10.1 Определить значение $e^{\delta n}$, где δ=0,072, n=10.

Решение. Решим задачу, разложив ряд до 3-го, 4-го и 5-го членов ряда.

$$e_3^{0,072} = 1 + 0,072 + \frac{0,072^2}{2!} = 1,074592;$$

$$e_4^{0,072} = 1,074592 + \frac{0,072^3}{3!} = 1,0746542;$$

$$e_5^{0,072} = 1,0746542 + \frac{0,072^4}{4!} = 1,0746553;$$

$$e^{\delta n} = e^{0,072 \cdot 10} = 1,0746553^{10} = 2,0544324.$$

Пусть первоначальная сумма равна 1 млн. руб., тогда наращенная величина составит $S = 1000000 \cdot e^{0,072 \cdot 10} = 2054432,4$ руб.

Хотя на практике, как правило, применяется инвестирование средств на конечном отрезке времени, но если оно происходит достаточно часто, то его описание с помощью модели с непрерывным наращением процентов дает достаточно высокую точность. Чем сложнее система, тем проще должен быть математический аппарат для ее описания, и при анализе сложных финансовых схем использование модели непрерывного наращения не имеет альтернативы.

Закон наращения при непрерывном начислении процентов (10.1) совпадает по форме с (9.4) с той только разницей, что в (9.4) время измеряется дискретно с шагом $1/m$, а в (10.1) – непрерывно. Рис. 10.1 отражает динамику наращения единичной суммы при дискретном (ступенчатом) и непрерывном (плавном) наращении процентов.

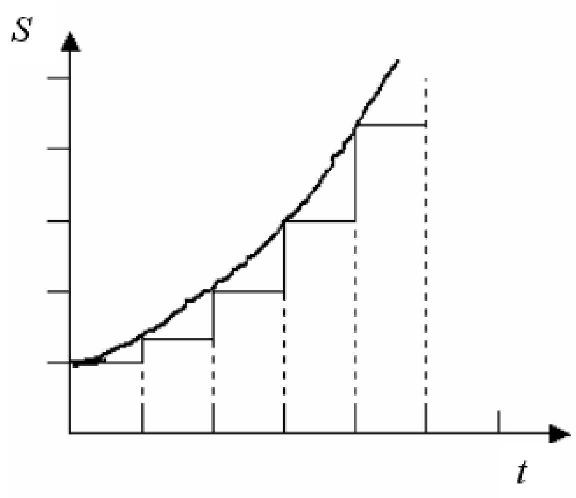

Рис.10.1 Динамика наращения единичной суммы

11. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов. Исчисление сроков платежей и процентных ставок

В этом случае применяем два вида учета – математический и банковский, как и при изучении простых процентов.

Математическое дисконтирование

Решим уравнение (8.1) относительно *P*.

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}, \qquad (11.1)$$

где $\frac{1}{(1+i)^n}$ – учетный (дисконтный) множитель для случая, когда проценты начисляются один раз в году.

Если проценты начисляются *m* раз в году, то

$$P = \frac{S}{(1+j/m)^{mn}}, \qquad (11.2)$$

где $\frac{1}{(1+j/m)^{mn}}$ – дисконтный множитель. Если *mn* – целое число, то значения множителя можно найти по таблице и $i = j/m$, а $N = mn$.

Определение 11.1 Величину *P*, полученную дисконтированием *S*, называют *современной (приведенной)* величиной *S*. Она показывает ту базу, начисление процентов на которую дает *S*.

Величины *P* и *S* связаны между собой сроком и процентной ставкой:

$$S - P = D.$$

Пример 11.1 Необходимо определить современную величину 50 тыс. руб., которые будут выплачены через 5 лет. При расчете применяется ставка сложных процентов, равная 5%.

Решение. Для решения используем формулу (11.1):

$P = 50 \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^5} = 50 \cdot 1{,}05^{-5} = 50 \cdot 0{,}78353 = 39{,}176$ тыс. руб. (Величину множителя наращения можно найти по таблице $D(n;i) = D(5;5) = 0{,}783526$). Если на сумму 39,176 руб. начислять сложные проценты (5%) годовых, то к концу пятилетия она увеличиться до 50 тыс. руб. Если срок ссуды 52 года, тогда

$P = 50 \cdot 1{,}05^{-50} \cdot 1{,}05^{-2} = 50 \cdot 0{,}087204 \cdot 0{,}907029 = 3{,}955$ тыс. руб.

Чем выше ставка, тем сильнее дисконтирование и, следовательно, в большей степени уменьшается P при всех прочих равных условиях. При увеличении срока платежа значение современной величины будет убывать, т.е. $\lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{S}{(1+i)^n} = 0$ – при очень больших сроках платежа современная величина последнего будет незначительна.

Банковский учет

Процесс вычисления дисконта по сложной учетной ставке аналогичен процессу начисления сложных процентов – здесь несколько раз производиться ступенчатое дисконтирование суммы, подлежащей возврату. Разница заключается в направленности процессов во времени: начислению процентов соответствует прямой ход времени, дисконтированию – обратный.

Текущая стоимость дисконтированной за один период конечной суммы равна $P_1 = S \cdot (1-d)$, в конце второго периода $P_2 = S \cdot (1-d)^2$ и т.д.

То есть после n периодов дисконтирования текущая стоимость суммы будет равна

$$P = S \cdot (1-d)^n. \qquad (11.3)$$

<u>Пример 11.2</u> Определить текущую стоимость векселя на сумму 50 тыс. руб. сроком на 2 года при использовании сложной учетной ставки 40% годовых.

Решение. Воспользуемся формулой (11.3):

$P = S \cdot (1-d)^n = 50 \cdot (1-0{,}4)^2 = 18$ тыс. руб.

Исчисление срока платежа и процентных ставок

Методы финансово-экономических расчетов позволяют определить необходимый срок окончания или начала финансовой операции. Так же как и в случае расчетов по простым процентным ставкам, выведенные ранее формулы расчетов сложных процентов решаются относительно n или $i(j)$, d.

Например, при наращении по сложной годовой ставке срок операции, логарифмируя формулу (10.1), определяется выражением:

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1+i)}. \qquad (11.4)$$

А срок операции при дисконтировании по сложной учетной ставке – аналогично, логарифмируя формулу (11.3):

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{\ln(1-d)}. \qquad (11.5)$$

<u>Пример 11.3</u> За какой срок (в годах) сумма, равная 75 тыс. руб., достигнет 110 тыс. руб., при условии, что на нее начисляются сложные проценты 7,5% 1 раз в год.

Решение. Используем формулу (11.4):

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln \frac{110}{75}}{\ln 1{,}075} = 5{,}29 \text{ года.}$$

Значения процентных ставок находим, решив соответствующие формулы наращения (8.1) и (11.3):

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (11.6)$$

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (11.7)$$

<u>Пример 11.4</u> Вексель выписан на срок 2 года. Какая должна быть сложная учетная ставка, чтобы при учете векселя владелец получил 90% от его суммы?

Решение. Решить задачу можно, используя формулу (11.7):

$$d = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 - (0{,}9)^{\frac{1}{2}} = 0{,}0513.$$

12. Эквивалентные процентные ставки

Изменение условий коммерческих сделок. Принцип финансовой эквивалентности.

Выведенные ранее процентные ставки: простая, сложная, учетная являются количественными характеристиками различных финансовых операций. В практической деятельности постоянно возникает потребность в сравнивании между собой по выгодности условий различных финансовых и коммерческих сделок. Для этого разнородные и потому несопоставимые ставки целесообразно привести к единообразному показателю и, опираясь на его числовые значения, сопоставить имеющиеся варианты.

В основе такого показателя лежит понятие *эквивалентной процентной ставки.*

Определение 12.1 <u>*Эквивалентной процентной ставкой*</u> называют ставку, которая для рассматриваемой финансовой операции даст точно такой же денежный результат, что и применяемая в этой операции ставка.

Таким образом, для отыскания эквивалентной ставки выбранного вида (простой, сложной, учетной) необходимо записать условие *эквивалентности* использования данной ставки и базовой, которое сводится к равенству наращенных сумм.

1. Рассмотрим ситуацию использования простых ставок и определим соотношение простых ставок i и d при условии равенства доходов, выплачиваемых по этим ставкам.

Имеем $I = D$ или $P \cdot n \cdot i = S \cdot n \cdot d$. Отсюда $S \cdot (1 - n \cdot d) \cdot n \cdot i = S \cdot n \cdot d$ или

$$i = \frac{d}{1 - n \cdot d}. \tag{12.1}$$

В другом случае используем равенство $P \cdot n \cdot i = P \cdot (1 + n \cdot i) \cdot n \cdot d$ или

$$d = \frac{i}{1 + n \cdot i}. \tag{12.2}$$

Данные тождества выводятся из предположения, что первоначальные и наращенные суммы денег (P и S), фигурирующие в расчетах по ставке i и d, равны. Поэтому ставки i и d в этом случае являются эквивалентными и приносят одинаковый доход при начислении простых процентов и одинаковом временном промежутке. В этом случае естественно, что для сторон – участников сделки все равно, каким образом осуществляются расчеты.

Если срок операции выражен в днях, то в формулы (12.1) и (12.2) подставляется значение $n = \frac{t}{Y}$ и они используются для точных процентов с приближенным сроком операции.

Очевидно, что для эквивалентных ставок выполняется неравенство $d < i$, т.е. доходность для финансовой операции, выраженной учетной ставкой d выглядит заниженной. Поэтому для сопоставления доходностей различных вариантов сделок при изменении условий расчетов исчисляют эквивалентные ставки.

<u>**Пример 12.1**</u> Определить значение учетной ставки, эквивалентной простой ставке процентов, равной 10%.

Решение. Используем формулу (12.2):

$d = \frac{i}{1 + n \cdot i} = \frac{0{,}1}{1 + 0{,}1} = 0{,}0909$ (9,091%). Таким образом, операция, в которой фигурирует учетная ставка 9,091% дает для годового периода (n=1) тот же финансовый результат, что и простая ставка процентов, равная 10% годовых.

2. Рассмотрим пример расчетов с использованием сложных процентной и учетной ставок. Такая ситуация может иметь место в случае, когда, например, коммерческий банк учитывает векселя по сложной учетной ставке, а для

финансового анализа требуется оценить доходность его активных операций по ставке сложного годового процента, то есть через эквивалентную ставку i. Из формул (11.1) и (11.3) перейдем к равенствам множителей наращения:

$$1 - d = \frac{1}{1+i}$$

или

$$i = \frac{d}{1-d}. \qquad (12.3)$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \qquad (12.4)$$

Во всех приведенных ранее формулах эквивалентные ставки зависели от срока ссуды, но на эквивалентные ставки при расчетах по правилу сложных процентов срок не влияет.

Определим эквивалентность простых и сложных процентных ставок $i_n,\ d_n, i_c,\ j_c,\ d_c$ (рис. 12.1). В данном случае говорят об эквивалентности ставок $i_n,\ d_n$ (соответственно простой процентной и простой учетной ставок) сложным ставкам $i_c,\ j_c,\ d_c$.

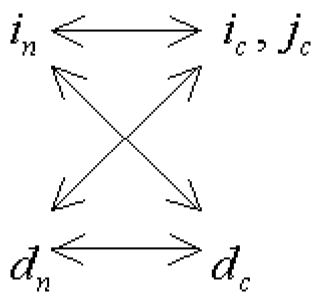

Рис. 12.1 Схема преобразования процентных ставок на условиях эквивалентности

1. Начнем со ставок i_n и i_c.

   1.1. При начислении процентов 1 раз в году из равенства множителей наращения $(1 + i_n \cdot n) = (1 + i_c)^n$ следует

$$i_n = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n}. \qquad (12.5)$$

$$i_c = (1 + i_n \cdot n)^{\frac{1}{n}} - 1 = \sqrt[n]{1 + i_n \cdot n} - 1. \qquad (12.6)$$

Т.е. эквивалентность ставок существенно зависит от срока начисления процентов.

<u>Пример 12.2</u> Ссуда выдана по 20 сложных годовых процентов. Каков должен быть уровень простой ставки при сроке : а) 10 лет; б) 8 месяцев.

Решение. Воспользуемся формулой (12.5):

а) $i_n = \dfrac{(1+i_c)^n - 1}{n} = \dfrac{(1+0{,}2)^{10} - 1}{10} = 0{,}51917\ (51{,}92\%)$;

б) $i_n = \dfrac{(1+i_c)^n - 1}{n} = \dfrac{(1+0{,}2)^{\frac{8}{12}}}{\frac{8}{12}} = \dfrac{1{,}2^{\frac{2}{3}} - 1}{\frac{2}{3}} = 0{,}19386$ (19,39%).

1.2. Если начисления проводятся несколько раз в году, то из равенства множителей наращения $(1+i_n \cdot n) = \left(1+\dfrac{i_c}{m}\right)^{nm}$ получаем формулы:

$$i_n = \frac{\left(1+\dfrac{i_c}{m}\right)^{nm} - 1}{n}, \tag{12.7}$$

$$i_c = m \cdot \left[(1+i_n \cdot n)^{\frac{1}{nm}} - 1\right]. \tag{12.8}$$

2. В случае, когда нужно определить эквивалентность простой учетной ставки и ставки сложных процентов:

2.1. Из равенства множителей наращения $(1+i_c)^n = \dfrac{1}{(1-n \cdot d)}$ при начислении процентов 1 раз в году, получим:

$$i_c = (1-n \cdot d)^{-\frac{1}{n}} - 1, \tag{12.9}$$

$$d = \frac{1}{n} \cdot \left[1-(1+i_c)^{-n}\right]. \tag{12.10}$$

2.2. Если сложные проценты начисляются m раз в году, тогда при равенстве временных баз начисления процентов

$$j = m \cdot (1-n \cdot d)^{-\frac{1}{mn}} - 1, \tag{12.11}$$

$$d = \frac{1}{n} \cdot \left[1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}\right]. \tag{12.12}$$

Эквивалентность непрерывных и дискретных ставок

Непрерывную процентную ставку (силу роста) теоретически можно сопоставить с любой дискретной процентной ставкой (простой или сложной) и из равенства множителей наращения получить соответствующую эквивалентную ставку.

1) δ и i_c, j_c:

$$\delta = \ln(1+i),\ i = e^{\delta} - 1; \qquad (12.13), (12.14)$$

$$\delta = m \cdot \ln(1+ {}^{j}\!/_{m}),\ j = m \cdot \left(e^{\delta/m} - 1 \right). \qquad (12.15),$$

(12.16)

2) δ и d_n, d_c:

$$\delta = \frac{-\ln(1 - n \cdot d_n)}{n},\ d_n = \frac{1 - e^{-\delta}}{n}; \qquad (12.17), (12.18)$$

$$\delta = -\ln(1 - d_c),\ d_c = 1 - e^{-\delta}. \qquad (12.19), (12.20)$$

Принцип финансовой эквивалентности

На практике часто бывает необходимо заменить одно финансовое обязательство другим (например, с более отдаленным сроком платежа или объединить несколько обязательств в одно (консолидировать платежи)). В этом случае используют принцип эквивалентности, так как предлагаемые изменения должны быть безубыточны для сторон сделки.

Для решения таких задач составляют уравнение эквивалентности, принцип которого состоит в том, что платежи по старому обязательству (заменяемые платежи), приведенные к какому-то моменту времени, должны быть равны величине нового обязательства, приведенного к тому же моменту времени. Такие платежи становятся эквивалентными. И приведение разновременно выплачиваемых сумм денег осуществляется путем их дисконтирования (приведения к более ранней дате) или, наоборот, наращивания, если эта дата относится к будущему времени. Принцип эквивалентности обязательств лежит в основе финансовых расчетов долгосрочного и краткосрочного характеров: при объединении контрактов, их замене, досрочном погашении или, наоборот, продлении сроков платежей и т.д.

Пусть имеются платежи S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, начало отсчета срока приходится на один день. Эти платежи эквивалентны, если их первоначальные суммы, рассчитанные по одной и той же ставке, равны. Замена S_1 на S_2 в этом случае формально не меняет финансовую картину.

Пример 12.3 Имеются два обязательства. Условия первого: $S_1 = 400$ тыс. руб., $n_1 = 4$ мес.; условия второго: $S_2 = 420$ тыс. руб., $n_2 = 9$ мес. Можно ли считать их равноценными при простой процентной ставке i=10%?

Решение. Дисконтируем эти платежи на начало срока.

$$P_1 = \frac{400}{1 + \frac{4}{12} \cdot 0{,}1} = 387{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

$$P_2 = \frac{420}{1 + \frac{9}{12} \cdot 0{,}1} = 390{,}7 \text{ тыс. руб., т.е. } P_1 < P_2 \text{ при ставке 10\%.}$$

Изменение условий контракта. Консолидирование задолженности

Пусть платежи $S_1,\ S_2,\dots,\ S_m$ имеют сроки $n_1,\ n_2,\dots,\ n_m$ и объединяются в один в сумме S_0 со сроком n_0. Причем, если задан срок уплаты консолидированного платежа, то определяется S_0, и наоборот, если задана эта величина, то находится n_0. При первой постановке задачи, строго говоря, можно обойтись и без записи условия эквивалентности.

Если срок n_0 больше, чем сроки объединяемых платежей, то размер нового платежа равен сумме консолидируемых платежей, наращенных по принятой ставке на момент выплаты S_0.

Пример 12.4 Компания должна выплатить 10 тыс. руб. через 2 года, 15 тыс. руб. через 3 года (рис. 12.2). Эти два платежа решено было заменить одним через 4 года, используя ставку 10% годовых.

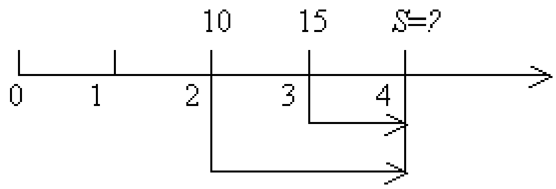

Рис. 12.2. Схема консолидации платежей

Решение.

$S_0 = 10 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}1) + 15 \cdot (1 + 0{,}1) = 28{,}5$ тыс. руб.

Если один или более консолидируемых платежей имеют сроки менее даты консолидации n_0, то данные платежи наращиваются. Если у каких-либо консолидируемых платежей сроки превышают n_0, то эти платежи дисконтируются.

Пример 12.5 К двум указанным платежам примера 12.4 добавляется платеж 20 тыс. руб. (рис. 12.3), который следовало бы вернуть через 6 лет (все платежи исчислены от одной даты). Достигнуто решение о консолидации платежей по простой процентной ставке 10% через 5 лет. Определить сумму консолидированного платежа.

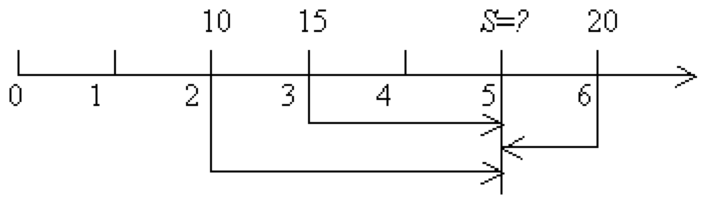

Рис. 12.3. Схема консолидации платежей

Решение.

$$S_0 = 10 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 3) + 15 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 2) + \frac{20}{1 + 0{,}1 \cdot 1} = 49{,}18 \text{ тыс. руб.}$$

Т.е. в общем случае при применении простой процентной ставки искомую величину S_0 находим как сумму наращенных или дисконтированных платежей S_j.

$$S_o = \sum_j S_j \cdot (1 + n_j \cdot i) + \sum_k S_k (1 + n_k \cdot i)^{-1}, \qquad (12.21)$$

где S_j – суммы объединяемых платежей со сроками, менее n_0, S_k – суммы объединяемых платежей со сроками, более n_0.

Для случая сложных процентов формула (12.21) принимает вид

$$S_o = \sum_j S_j \cdot (1 + i)^{n_j} + \sum_k S_k (1 + i)^{-n_k}. \qquad (12.22)$$

При консолидации платежей по простой учетной ставке получаем вид формулы:

$$S_o = \sum_j S_j \cdot (1 - n_j \cdot d)^{-1} + \sum_k S_k (1 - n_k \cdot d). \qquad (12.23)$$

При определении срока консолидированного платежа при заданной его сумме составляем уравнение эквивалентности на начальную дату:

При использовании простой процентной ставки

$S_0 \cdot (1 + n_0 \cdot i) = \sum_j S_j \cdot (1 + n_j \cdot i)^{-1}$ и затем для сокращения записи обозначим современную величину консолидированных платежей как $P_0 = \sum_j S_j \cdot (1 + n_j \cdot i)^{-1}$. Тогда

$$n_0 = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{S_0}{P_0} - 1 \right) = \frac{S_0 - P_0}{P_0 \cdot i}. \qquad (12.24)$$

<u>Пример 12.6</u> Два платежа оплатить 10 тыс. руб. через 2 года и 20 тыс. руб. через 5 лет объединяются в один с выплатой суммы 25 тыс. руб. Ставка простого процента 10%. Определить, когда произойдет выплата.

Решение. Сначала найдем P_0.

$$P_0 = \frac{10}{1+0{,}1\cdot 2} + \frac{20}{1+0{,}1\cdot 5} = 8{,}3 + 13{,}3 = 21{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

$$n_0 = \frac{25-21{,}6}{21{,}6\cdot 0{,}1} = 1{,}57 \text{ лет.}$$

При применении простой учетной ставки получим

$$n_0 = \frac{1}{d}\cdot\left(\frac{S_0}{V}-1\right), \tag{12.25}$$

где $V = \sum_k S_k(1-n_k\cdot d)$ – сумма современных величин консолидируемых платежей. Здесь решение возможно. Если $S_0 > V$.

Если консолидация производится на основе сложных процентных ставок, тогда

$$n_0 = \frac{\ln\left(S_0 / Q\right)}{\ln(1+i)}, \tag{12.26}$$

где $Q = \sum_j S_j\cdot(1+i)^{-n_j}$.

13. Реальная ставка доходности с учетом инфляции

Определение 13.1 *<u>Инфляция</u>* – это снижение реальной покупательной способности денег.

В чисто финансовых расчетах, где фигурируют только изменения номинальных денежных сумм, этот фактор не учитывается. В реальности если, например, банком предложена ставка доходности 45%, но при этом темп инфляции составляет 50% в год, то вряд ли такое соотношение привлечет инвесторов. Т.е. необходим качественный анализ и количественный расчет того, какова же будет реальная доходность инвестора с учетом темпов инфляции.

Сначала введем показатели уровня и темпов инфляции.

Определение 13.2 *<u>Уровень инфляции</u>* выражается в виде индекса цен. *<u>Индекс цен</u>* – это измеритель соотношения между совокупной ценой определенного набора товаров и услуг, называемых «рыночной корзиной», для данного временного периода и совокупной ценой сходной группы товаров и услуг в базовом периоде.

$$J_t = \frac{P_t}{P_0}. \tag{13.1}$$

Федеральное правительство США рассчитывает индексы различных «корзин». Наиболее известный из них – индекс потребительских цен (ИПЦ) – это цена фиксированной корзины, содержащей 300 потребительских товаров и услуг, покупаемых типичным горожанином. Индекс цен ВНП, или дефлятор ВНП, включает не только цены потребительских товаров и услуг, но также и цены инвестиционных товаров, товаров, покупаемых правительством, а также товаров и услуг, купленных и проданных на мировом рынке.

Определение 13.3 *Темпом инфляции* h_t за определенный период t называют относительное изменение индекса цен за этот период.

$$h_t = \frac{J_t - J_0}{J_0}, \tag{13.2}$$

где J_0, J_t – индексы цен соответственно в начале и в конце рассматриваемого периода.

Если известны индексы цен в начале периода и прогнозируемый темп инфляции за период, то можно вычислить ожидаемый индекс цен в конце периода:

$$J_t = J_0 \cdot (1 + h_t). \tag{13.3}$$

Полученное значение индекса цен будет исходным для вычислений в следующем периоде:

$$J_{2t} = J_t \cdot (1 + h_t) = J_0 \cdot (1 + h_t)^2.$$

По прошествии n периодов индекс цен будет равен

$$J_{nt} = J_0 \cdot (1 + h_t)^n. \tag{13.4}$$

Темп инфляции за этот же интервал времени вычисляется по формуле:

$$h_{nt} = \frac{J_{nt}}{J_0} - 1 = (1 + h_t)^n - 1. \tag{13.5}$$

Из формулы (13.4) видно, что возрастание индекса цен аналогично наращению денежных сумм по закону сложных процентов. Если известен темп инфляции за какую-либо $1/m$-ую часть года, то годовой темп инфляции в соответствии с формулой (13.5) определяется выражением:

$$h_{год} = \frac{J_1}{J_0} - 1 = (1 + h_{1/m})^m - 1. \tag{13.6}$$

<u>**Пример 13.1**</u> Темп инфляции за месяц составляет 0,5%. Определить: а) полугодовой; б) годовой темпы инфляции.

Решение. Нам известно, что $h_{1/12} = 0{,}005$. По формуле (13.6):

а) $h_{1/2} = (1 + h_{1/12})^6 - 1 = 1{,}005^6 - 1 = 0{,}0304 \ (3{,}04\%)$;

б) $h_1 = (1 + h_{1/12})^{12} - 1 = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}0617 \ (6{,}17\%)$.

Реальная ставка доходности и инфляционная премия

Инфляционное обесценение денег существенно снижает реальную доходность финансовой операции.

Определение 13.4 <u>*Реальная доходность*</u> – относительное приращение за период *t* реальной покупательной способности *C* денежной суммы, равной отношению этой суммы к индексу цен в данный момент времени:

$$r_t = \frac{C_t - C_0}{C_0} = \frac{C_t}{C_0} - 1, \qquad (13.7)$$

причем

$$C_t = \frac{S_t}{J_t},$$

где S_t – денежная сумма в момент времени *t*, J_t – индекс цен в момент времени *t*, C_0 – реальная покупательная способность денег в начале периода, C_t – реальная покупательная способность денег в момент времени *t*.

Покупательная способность наращенной за период суммы *P* равна:

$$C_t = \frac{S_t}{J_t} = \frac{P_0 \cdot (1+i_t)}{J_0 \cdot (1+h_t)} = C_0 \cdot \frac{1+i_t}{1+h_t}, \qquad (13.8)$$

где $C_0 = \dfrac{P_0}{J_0}$.

Подставляя выражение (13.8) в выражение (13.7) получим формулу, выражающую реальную доходность через процентную ставку и темп инфляции:

$$r_t = \frac{i_t - h_t}{1+h_t}, \qquad (13.9)$$

если период равен году, то нижние индексы у переменных опускают и *h* – годовой темп инфляции, *r* – реальная годовая ставка доходности, *i* – процентная ставка за год.

Для лучшего понимания формулы (13.9) можно дать следующие пояснения. Если инфляция составляет *h*% в год, то один и тот же набор товаров стоит в конце года в *(*1+*h)* раз больше, чем в начале этого года или можно сказать, что в *(*1+*h)* раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы из-за инфляции. Одна денежная единица возрастает за год в (1+*i*) раз из-за наращения процентов. В итоге реальный эквивалент суммы $S = P \cdot (1+i)$ составит величину $S = P \cdot \dfrac{(1+i)}{(1+h)}$. В результате по определению реальная ставка процентов составит:

$$r = \frac{S-P}{P} = \frac{i-h}{1+h}.$$

При достаточно большом темпе инфляции *h* реальная ставка *r* может даже стать отрицательной, т.е. если кредитор не отреагирует на инфляцию достаточным увеличением ставки, он будет работать себе в убыток.

Формула (13.9) опровергает распространенное заблуждение, что будто бы для получения реальной ставки доходности достаточно из процентной ставки вычесть темп инфляции. Это справедливо только при очень малой величине темпа инфляции, когда величиной h в знаменателе можно пренебречь.

Пример 13.2 Определить реальную годовую ставку доходности, если годовая процентная ставка равна 16%, а месячный темп инфляции равен 0,8%.

Решение. Определим годовой темп инфляции, воспользовавшись формулой (13.6):

$h = (1 + h_{1/12})^{12} - 1 = (1 + 0{,}008)^{12} - 1 = 0{,}1003\ (10{,}03\%)$.

Далее используем формулу (13.9):

$$r = \frac{0{,}16 - 0{,}1003}{1 + 0{,}1003} = 0{,}0542\ (5{,}42\%).$$

Если бы мы пренебрегли величиной h в знаменателе, то получили бы $r = 0{,}0597$ – больше на полпроцента.

Формула (13.9) удобна для демонстрации снижения доходности инвестиций в условиях инфляции, показывающей величину реальной доходности при заданной процентной ставке. На практике же обычно задаются минимальной приемлемой для инвестора величиной реальной доходности (барьерной ставкой) r, исходя из которой определяют минимальную процентную ставку i, под которую еще имеет смысл инвестировать средства. Из формулы (15.9) выведем величину i.

$$i = r + h \cdot (1 + r). \qquad (13.10)$$

Формула (13.10) носит название *формулы Фишера*. Второе слагаемое в правой части этой формулы – величина, которую необходимо прибавить к реальной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. Эта величина называется *инфляционной премией.*

Воспользуемся условиями примера (13.2). Пусть барьерная ставка равна 15% годовых при темпе инфляции 10,03% в год. Тогда приемлемая величина процентной ставки будет равна:

$$i = 0{,}15 + 0{,}1003 \cdot (1 + 0{,}15) = 0{,}2653\ (26{,}53\%).$$

Чем выше годовой темп инфляции, тем больший разрыв между процентной и реальной ставкой доходности. В данном примере – почти в 2 раза.

Реальная ставка доходности с учетом налога

Вопрос о налогообложении прибыли от инвестирования средств приобретает особую важность, ведь налог начисляется не с реального дохода, а с номинального, равного приращению денежной суммы, и величина налога может оказаться больше реального дохода. Пусть ставка налога на прибыль равна α, тогда чистая прибыль, т.е. прибыль после уплаты налога, равна $\Delta P = i \cdot P - i \cdot P \cdot \alpha = P \cdot i \cdot (1 - \alpha)$. Отсюда видно, что учет налога на прибыль сводится к замене процентной ставки i на ставку $i_\alpha = i \cdot (1-\alpha)$. Формула для реальной доходности с учетом налога на прибыль примет вид

$$r = \frac{i \cdot (1-\alpha) - h}{1+h}. \qquad (13.11)$$

<u>Пример 13.3</u> Определим реальную ставку доходности для условий примера (13.2), но с учетом налогообложения прибыли по ставке: а) 25%; б) 40%.

Решение. По формуле (13.11)

а) $r = \dfrac{0{,}16 \cdot (1-0{,}25) - 0{,}1003}{1+0{,}1003} = \dfrac{0{,}0197}{1{,}1003} = 0{,}0179\ (1{,}79\%)$.

Налогообложение привело к снижению реальной ставки доходности с 5,42% до значения 1,79%.

б) $r = \dfrac{0{,}16 \cdot (1-0{,}4) - 0{,}1003}{1{,}1003} = -0{,}0039\ (-0{,}39\%)$.

При таком налогообложении инвестиции под ставку 16% годовых убыточны.

Определим приемлемую процентную ставку с учетом с учетом налогообложения, преобразуя формулу (13.11).

$$i = \frac{r + h \cdot (1+r)}{1-\alpha}. \qquad (13.12)$$

<u>Пример 13.4</u> Определить приемлемую процентную ставку для условий примера (13.3) с барьерной ставкой, равной 15%.

а) $i = \dfrac{0{,}15 + 0{,}1003 \cdot (1+0{,}15)}{1-0{,}25} = 0{,}3538\ (35{,}38\%)$, т.е. процентная ставка в этом случае должна быть не менее 35,4% годовых.

б) $i = \dfrac{0{,}15 + 0{,}1003 \cdot (1+0{,}15)}{1-0{,}4} = 0{,}4422\ (44{,}22\%)$ – банкам или заинтересованным предприятиям следует привлекать инвесторов не менее чем под 44,22% годовых.

Учет инфляции в практических расчетах

Инфляция во многих случаях на величину эффективности финансовых и коммерческих сделок, в частности на эффективность инвестиционных проектов (ИП), на условия финансовой реализуемости, на потребность в финансировании и эффективность участия в проектах собственного капитала. Это влияние особенно заметно для проектов с растянутым во времени инвестиционным циклом (например, в добывающей промышленности). Учет инфляции осуществляется с использованием:

- общего индекса внутренней рублевой инфляции;
- прогнозов валютного курса рубля;
- прогнозов внешней инфляции;

- прогнозов изменения во времени цен на продукцию и ресурсы (в том числе газ, нефть, энергоресурсы, оборудование, строительно-монтажные работы, сырье, отдельные виды материальных ресурсов), а также прогнозов изменения уровня средней заработной платы;
- прогнозов ставок налогов, пошлин, ставок рефинансирования ЦБ РФ.

Наименее выгодной для проекта является ситуация, при которой в начале проекта существует высокая инфляция и, следовательно, при потребности в дополнительном финансировании, заемный капитал берется под высокий кредитный процент, а затем она падает. Для избежания неоправданно высоких процентных выплат можно рекомендовать при заключении кредитных соглашений предусматривать пересмотр процентной ставки в зависимости от инфляции. Одной из возможностей такого рода является фиксация в кредитном соглашении не номинальной, а реальной процентной ставки, с тем, чтобы при начислении и выплате процентов увеличивать ее (по формуле Фишера) в соответствии с инфляцией, фактически имевшей место в это время.

14. *Оценка и анализ денежных потоков*

Разного рода финансовые операции, как правило, предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Например, получение и погашение долгосрочного кредита, купонные выплаты владельцам облигаций, растянутые во времени инвестиции в проект и доходы от его реализации и т.п.

Определение 14.1 <u>*Потоками платежей*</u> или <u>*денежными потоками* (*cash flow*)</u> называется ряд следующих друг за другом выплат и поступлений. Члены потока платежей могут быть положительными (поступления) и отрицательными (выплаты) величинами.

Удобное графическое средство анализа – диаграмма двустороннего потока платежей, которая показывает, как распределяются вложения и доходы во времени. На горизонтальной оси диаграммы откладывается время, на вертикальной – денежные средства («плюс» – доходы, «минус» – расходы). В качестве примера на рис. 14.1 приведена диаграмма потока платежей. В момент времени t=0 поступило 15 млн. руб., в момент t=1 – 20 млн. руб., в момент времени t=2 выплачено 20 млн. руб., в момент t=3 поступило 30 млн. руб., в момент t=4 выплачено 15 млн. руб.

Определение 14.2 Поток платежей, все члены у которого положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют <u>*финансовой рентой*</u> или <u>*аннуитетом*</u> вне зависимости от происхождения этих платежей, их назначения и целей.

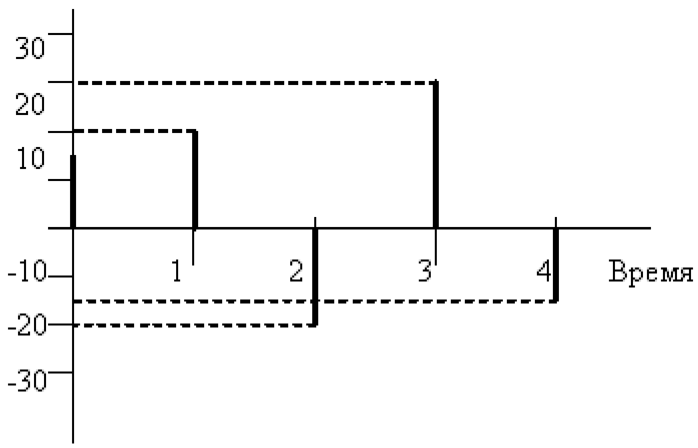

Рис. 14.1 Диаграмма потока платежей

Финансовые ренты описываются следующими параметрами:

Определение 14.3 *Член ренты (R)* – величина каждого отдельного платежа.

Определение 14.4 *Период ренты* – временной интервал между двумя отдельными платежами.

Определение 14.5 *Срок ренты (n лет)* – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода.

Определение 14.6 *Процентная ставка (i)* – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Определение 14.7 *Наращенная сумма (S)* – сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока (в некоторых источниках встречается обозначение *FVf – future value flow*).

Определение 14.8 *Современная величина потока платежей (A)* – сумма всех членов потока, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей (в некоторых источниках используется обозначение *PVf – present value flow*).

Кроме вышеназванных параметров при рассмотрении финансового потока используются понятия: *p* – число платежей в году, *m* – число начислений процентов в году.

Финансовые ренты можно классифицировать по следующим признакам:

1. В зависимости от продолжительности периода:
   - *годовые*;
   - *p – срочные.*
2. По числу начислений процентов в году:
   - *1 раз в год;*
   - *m – раз в год;*
   - *непрерывные.*
3. По величине членов ренты:
   - *постоянные* (с равными членами *R=const);*

- *переменные.*

4. По вероятности выплат:

- *верные* (когда предусмотрена безусловная выплата, например, погашение кредита)*;*
- *условные* (в зависимости от наступления некоторого события, например, пенсионные выплаты).

5. По числу членов:

- *ограниченные* (ренты с конечным числом членов);
- *вечные*.

6. По моменту выплаты платежей:

- *обычные ренты (postnumerando)*, если платежи производят в конце периода*;*
- *приведенные (prenumerando),* если выплаты производятся в начале периода.

7. По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или дата его заключения):

- *Немедленные ренты*
- *Отсроченные (отложенные) ренты.*

15. Наращенная сумма финансовой ренты

Годовая рента postnumerando

Пусть в конце каждого года в течение 4 лет в банк вносится по 1000 руб., проценты начисляются в конце года. Ставка 5% годовых. Графически этот процесс представлен на рис 15.1.

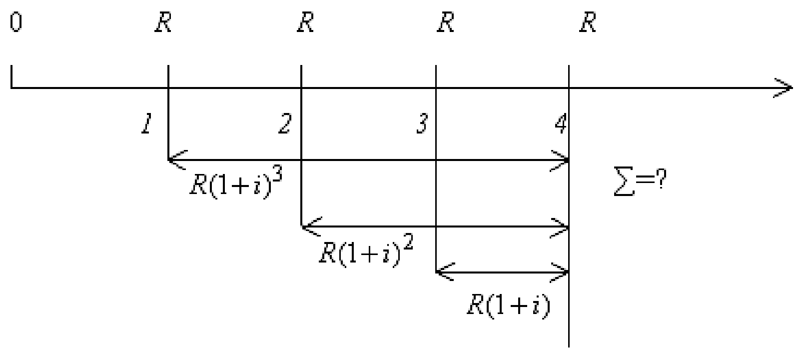

Рис. 15.1 Годовая рента *postnumerando*.

Таким образом, в конце срока ренты взносы с начисленными на них процентами представляют ряд чисел:

$$1000 \cdot 1{,}05^3,\ 1000 \cdot 1{,}05^2,\ 1000 \cdot 1{,}05,\ 1000$$

Мы получили ряд, представляющий собой геометрическую прогрессию. Наращенная к концу срока ренты величина будет равна сумме членов этого ряда.

(Известно, что сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a вычисляют по формуле: $S = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$*).*

В нашем случае первый член ряда – *R*, знаменатель – $(1+i)$.

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{15.1}$$

где величину $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – называют *коэффициентом наращения ренты* и часто обозначают как $s(n;i)$. Значения коэффициента наращения ренты табулированы и используются при вычислениях. Тогда формула (15.1) записывается как

$$S = R \cdot s(n;i). \tag{15.2}$$

Пример.15.1 Создается фонд, взносы производятся на протяжении 10 лет раз в конце года по 40 тыс. руб. На собранные средства начисляются проценты по ставке 10% годовых. Найти размер фонда к концу срока.

Решение. Воспользуемся таблицей коэффициентов наращения ренты и формулой (15.2):

$s(10;10) = 15{,}93742460$

$S = 40000 \cdot 15{,}93742460 = 637496{,}98$ руб.

Пусть теперь ставка равна 12%.

$S = 40000 \cdot \dfrac{(1+0{,}12)^{12} - 1}{0{,}12} = 701949{,}4$ руб.

Годовая рента postnumerando, начисление процентов m раз в году

Ранее мы определили *S* при условии, что проценты начисляются 1 раз в конце года. Рассмотрим случай, когда проценты начисляются m раз в году, следовательно, каждый раз применяется ставка j/m (*j* – номинальная процентная ставка). Такая ситуация может иметь место, если данный расчет предусмотрен условиями договора, а также встречался в практике российских банков, когда в условиях экономической нестабильности процентная ставка менялась в течение года (в том числе в сторону уменьшения).

Как и выше, члены ренты с начисленными процентами образуют некоторый ряд. На последний взнос проценты не начисляются, на предпоследний начисляются проценты, соответствующий множитель равен $(1+j/m)^m$ и т.д. Если переписать члены ренты с начисленными процентами в обратном порядке, то получим ряд: $R,\ R \cdot (1+j/m),\ R \cdot (1+j/m)^m,\ R \cdot (1+j/m)^{2m}, \ldots$

$R\cdot(1+j/m)^{m(n-2)}$, $R\cdot(1+j/m)^{m(n-1)}$. То есть здесь речь идет о возрастающей геометрической прогрессии с первым членом R и знаменателем $(1+j/m)^m$. Тогда сумма членов этой прогрессии равна:

$$S = R\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}. \qquad (15.4)$$

<u>**Пример 15.2**</u> Найти наращенную сумму ренты при условии, что проценты начисляются поквартально (условия примера 15.1. при значении процентной ставки 12%).

Решение. Используем формулу (15.4)

$$S = 40000\cdot\frac{(1+0{,}12/4)^{10\cdot 4}-1}{(1+0{,}12/4)^4-1} = 40000\cdot 18{,}0229403 = 720917{,}61 \text{ руб.}$$

Рента p–срочная (m=1), (p≠1)

Определим наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в год равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если годовая сумма платежа R, то каждый раз выплачивается R/p. Последовательность платежей с начисленными процентами также как и ранее представляет собой геометрическую прогрессию. Ее первый член R/p и знаменатель $(1+i)^{1/p}$. Общее число членов ряда равно $n\cdot p$. Тогда коэффициент наращенной суммы равен:

$$s^{(p)}(n;i) = \frac{1}{p}\cdot\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}\cdot n\cdot p}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = \frac{(1+i)^n-1}{p\cdot(1+i)^{1/p}-1}. \qquad (15.5)$$

Наращенная сумма составит величину:

$$S = R\cdot s^{(p)}(n;i). \qquad (15.6)$$

Рента p–срочная (p=m)

Число членов ренты в году может быть равно числу начислений процентов в течение года, т.е. m=p. Здесь можно воспользоваться формулой (17.1),в которой годовая процентная ставка i заменяется на j/m, а вместо числа лет n берется общее число периодов ренты – $m\cdot n$, причем член ренты равен R/m. Таким образом,

$$S = \frac{R}{m}\cdot\frac{\left(1+j/m\right)^{mn}-1}{j/m} = \frac{R}{m}\cdot s\left(mn;j/m\right). \qquad (15.7)$$

В том случае, когда p раз в год осуществляются платежи и m – раз в год начисляются проценты по ставке j/m за период начисления процентов, то универсальной для всех случаев, когда

а) $p=1; m=1$ − годовая рента;

б) $p=1; m\neq 1$ − годовая рента, начисление процентов m раз в год;

в) $m=1; p\neq 1$ − р-срочная рента, начисление процентов 1 раз в год;

г) $p=m; m\neq 1; p\neq 1$ − р-срочная рента, начисление процентов m раз в год

д) $p\neq 1; m\neq 1; p\neq m$

является формула:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \qquad (15.8)$$

Действительно, для варианта а) формула (15.8) преобразуется в формулу (15.7), для варианта б) – в формулу (15.5), для варианта в) – в формулу (15.4), а вариант г) сразу записывается в виде формулы (15.8).

Пример 15.3 Для создания резервного фонда ежегодно выделяется по 12 тыс. руб. На аккумулируемые средства начисляются сложные проценты по ставке 24%. Необходимо определить общую сумму фонда через 5 лет для следующих условий:

а) поступление в конце года, начисление процентов по полугодиям;

б) поступление в конце квартала, начисление процентов раз в год;

в) поступление в конце квартала и поквартальное начисление процентов.

Решение.

а) В этом случае m=2, p=1, j/m=0,12, тогда по формулам (15.4) или (15.8)

$$S=12\cdot\frac{(1+0{,}12)^{2\cdot 5}-1}{(1+0{,}12)^{2}-1}=99{,}3324 \text{ тыс. руб.}$$

б) Здесь $m=1,\ p=4,\ i=0{,}24$, тогда по формулам (15.5) или (15.8)

$$S=\frac{12}{4}\cdot\frac{(1+0{,}24)^{5}-1}{(1+0{,}24)^{1/4}-1}=105{,}363 \text{ тыс. руб.}$$

в) В этом случае $m=p=4$, тогда по формулам (15.7) или (15.8)

$$S=\frac{12}{4}\cdot\frac{(1+0{,}12)^{4\cdot 5}-1}{0{,}12}=216{,}157 \text{ тыс. руб.}$$

Рента prenumerando (пренумерандо)

В этом случае платежи осуществляются в начале каждого периода. Следовательно, число раз наращения каждого платежа на один раз больше, что дает увеличение каждого платежа в $(1+i)$ раз, т.е. для годовой ренты:

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot (1+i) = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (15.9)$$

Для годовой ренты с m разовым и непрерывным начислением процентов:

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot \left(1 + {}^{j}\!/_{m}\right)^{m}, \qquad (15.10)$$

и

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot e^{\delta}. \qquad (15.11)$$

Для p-срочной ренты при m=1, m=p и непрерывном начислении процентов

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot (1+i)^{1/p}, \qquad (15.12)$$

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot \left(1 + {}^{j}\!/_{m}\right)^{m/p}, \qquad (15.13)$$

и

$$S^{prenum} = S^{postnum} \cdot e^{\delta/p}. \qquad (15.14)$$

16. Современная величина финансовой ренты

Исчисление современной стоимости регулярных финансовых потоков имеет большое прикладное значение, так как такая потребность обязательно возникает при осуществлении проектного анализа, а также в расчетах по погашению долгосрочных займов, оценке и сравнении различного рода финансовых обязательств и поступлении средств, эффективности инвестиций, расчетов по страхованию и т.д.

Определение 16.1 Под *современной стоимостью (A* или *PVf)* финансовой ренты понимают сумму всех их платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа (рис. 16.1).

A – оценка всех будущих платежей, которые охватываются потоком. *A* – может быть отрицательной и положительной величиной.

Дисконтированные отдельные платежи представляют собой геометрическую прогрессию. Ее сумма имеет вид:

$$A = R \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{\left[(1+i)^{-1}\right]^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = R \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{\left[(1+i)^{-1}\right]^n - 1}{-i \cdot (1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (16.1)$$

Коэффициент приведения ренты:

$$a(n;i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (16.2)$$

Коэффициент приведения показывает, во сколько раз современная величина ренты больше члена ренты. Значения *a(n;i)* табулированы.

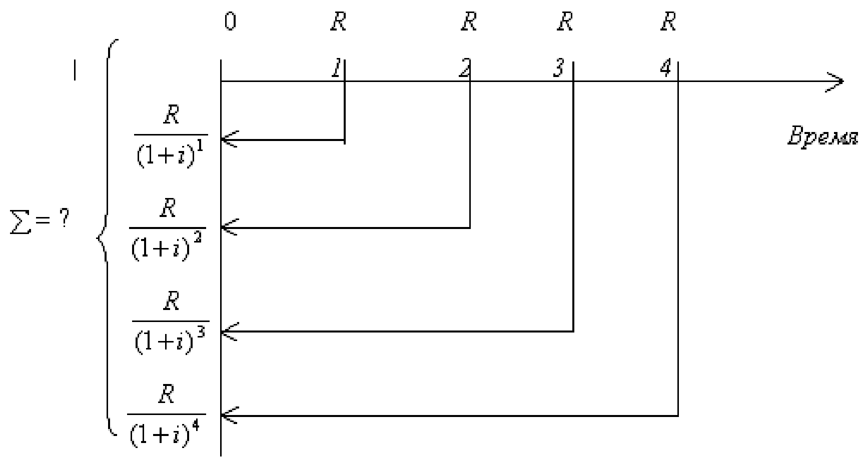

Рис. 16.1 Современная величина ренты.

Зависимость между наращенной и современной величинами рент

Современная величина ренты эквивалентна в финансовом смысле самой ренте. Она показывает, в какой сумме оцениваются платежи к определенному моменту времени. Наращенная сумма – это тоже оценка потока платежей, но приуроченная к концу срока ренты. Т.е., если *A* – оценка ренты на начало срока, а *S* – ее сумма с начисленными процентами, то наращение процентов, то наращение процентов на сумму *A* за *n* периодов должно дать сумму, равную *S*.

$$A\cdot(1+i)^n = R\cdot\frac{1-(1+i)^n}{i}\cdot(1+i)^n = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = S\text{, т.е.}$$

$$S = A\cdot(1+i)^n, \qquad (16.3)$$

и

$$A = S\cdot(1+i)^{-n}. \qquad (16.4)$$

Пример 16.1 Пусть рента выплачивается в конце года, *R*=500 руб., ставка 6% и 12% годовых. Найти современную величину ренты при условии, что она выплачивается 10лет.

Решение. Найдем по таблице значения соответствующих коэффициентов приведения:

$a(10;6) = 7{,}36008705;\ a(10;12) = 5{,}650223028;$

$A_6 = 500\cdot 7{,}36008705 = 3680{,}04;\ A_{12} = 500\cdot 5{,}650223028 = 2825{,}11.$

Таким образом, все производимые в будущем платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 3680,04 руб. и 2825,11 руб.

Чем выше *i*, тем меньше значение $a(n;i)$. Отметим также, что если

$$\lim_{n\to\infty} s(n;i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a(n;i) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} = \frac{1}{i}.$$

И в этом случае мы имеем дело с “вечной” рентой.

Определение 16.2 Под “вечной” рентой понимают ренту, число членов которой не ограничено – она выплачивается в течение бесконечного числа лет.

“Вечную” ренту иногда используют в случаях выплат по некоторым облигационным займам, в ряде долгосрочных операций, например, при оценке способности пенсионных фондов отвечать по своим обязательствам. Легко показать, что наращенная сумма такой ренты бесконечна, а современная величина равна

$$A = R \cdot a(n;i) = R \cdot \lim_{n\to\infty} a(n;i) = \frac{R}{i}. \tag{16.5}$$

Пример 16.2 Бизнесмен арендовал виллу за 10000$ в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?

Решение. Эта выкупная цена есть современная величина всех будущих арендных платежей и равна $A = \frac{R}{i} = \frac{10000}{0{,}05} = 200000\$$. 10000$ – эту сумму (процентные деньги) стал бы получать арендодатель с 200000$, помещенных в банк под 5% годовых.

Чтобы “вечно” получать доход с конечной суммы, нужно, чтобы приращение суммы за период между платежами ренты в точности компенсировало бы выплату, т.е. годовая выплата равна начисленным за год процентам на вложенный капитал. Эту ситуацию – зависимость суммы на счете от времени демонстрирует рис. 16.2.

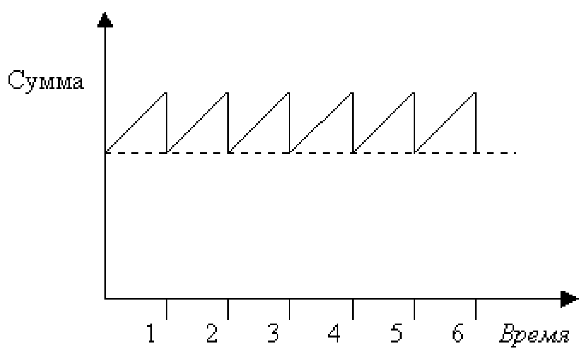

Рис. 16.2 Вечная рента.

Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в году

Если проценты начисляются m раз в год, то вместо выражения $(1+i)^{-n}$ в формуле (16.1) следует поставить эквивалентную величину $\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}$,тогда

$$A = R\cdot\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}. \qquad (16.6)$$

Умножим и разделим правую сторону формулы на величину ${}^{j}\!/_{m}$:

$$A = R\cdot\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{{}^{j}\!/_{m}}\cdot\frac{{}^{j}\!/_{m}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1} = R\cdot\frac{a\left(mn;{}^{j}\!/_{m}\right)}{s\left(m;{}^{j}\!/_{m}\right)}. \qquad (16.7)$$

Значения соответствующих множителей приведения и наращения можно найти по соответствующим таблицам или рассчитать самим.

Пример 16.3 Член годовой ренты (R) равен 1000 руб., начисление процентов по полугодиям (m=2), номинальная ставка (j) – 10%, срок ренты – 4 года. Найти современную величину ренты.

Решение. Воспользуемся формулой (16.4), а значения коэффициентов возьмем из таблицы.

$$a\left(mn;{}^{j}\!/_{m}\right) = a(16;5) = 10{,}83776956;$$

$$s\left(m;{}^{j}\!/_{m}\right) = s(2;5) = 2{,}050000000;$$

$$A = 1000\cdot\frac{10{,}8378}{2{,}05} = 5286{,}73 \text{ руб.}$$

Современная величина p-срочной ренты (m=1), (m>1; m ≠ p), (m>1; m=p)

а) Если платежи производятся не один, а $p\neq1$ раз в году и проценты начисляются один раз в году, то

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \qquad (16.8)$$

б) Для ситуации, когда количество платежей и начислений процентов в году совпадает, т.е. $p=m$

$$A = R \cdot \frac{1-\left(1+ {}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{j} \tag{16.9}$$

в) При начислении процентов m раз в год при условии, что $m \neq p$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+ {}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+ {}^{j}\!/_{m}\right)^{{}^{m}\!/_{p}} -1}. \tag{16.10}$$

Формулу (16.10) можно считать универсальной формулой для всех случаев, т.к. любую ранее полученную формулу для определения современной величины можно получить из формулы (16.10), изменяя соответствующий параметр.

17. Переменные потоки платежей

В практике чисто сталкиваются с потоками платежей, члены которого изменяются в о времени. Обычно такие изменения связаны с причинами производственного или коммерческого характера. Например, с расширением производственных мощностей увеличиваются периодические поставки с какого-то момента в будущем. Частным случаем такого потока является *переменная рента*, т.е. рента, члены которой изменяются в соответствии с каким-либо заданным законом развития. Если такого закона нет, то мы имеем дело с *нерегулярным потоком платежей*.

Рента с постоянным относительным изменением платежей

Пусть платежи изменяются с постоянным приростом, например, в q раз. Тогда члены ренты представляют собой ряд, члены которого представляют геометрическую прогрессию $R, R \cdot q, R \cdot q^2, ..., R \cdot q^{n-1}$. Дисконтируем эти величины и получаем:

$$R \cdot (1+i)^{-1}, R \cdot q \cdot (1+i)^{-2}, ..., R \cdot q^{n-1} \cdot (1+i)^{-n}.$$

В этой геометрической прогрессии первый член $R \cdot (1+i)^{-1}$ и знаменатель $q \cdot (1+i)^{-1}$. Тогда

$$A = R \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{q^n \cdot (1+i)^{-n} -1}{q \cdot (1+i)^{-1} - (1+i)} = R \cdot \frac{q^n \cdot (1+i)^{-n} -1}{q-(1+i)} \tag{17.1}$$

Так как согласно формуле (16.3) $S = A \cdot (1+i)^n$,то формулу для наращенной величины годовой переменной ренты рекомендуется вывести самостоятельно.

Пусть платежи производятся не один, а p pаз в год, причем каждый раз они изменяются с постоянным темпом роста q, а проценты начисляются 1 раз (m=1).

Тогда

$$S = R \cdot \frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}, \qquad (17.2)$$

$$A = R \cdot \frac{q^{np} \cdot (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}. \qquad (17.3)$$

где для р-срочной ренты R – величина первого члена ренты (а не годового и не разового, как рассматривалось выше).

<u>**Пример 17.1**</u> По условиям контракта предполагается в конце каждого года выплачивать платежи, первый из них равен 200 тыс. руб., следующие платежи увеличиваются каждый раз на 20%. Срок 6 лет. Найти современную и наращенную величины такой ренты. Ставка 5,5% годовых.

Решение. Здесь R=200; q=1,2; $(1+i)^n = 1{,}055^6 = 1{,}37883$;

$(1+i)^{-n} = 1{,}055^{-6} = 0{,}72525$. $A = 200 \cdot \dfrac{1{,}2^6 \cdot 0{,}72525 - 1}{1{,}2 - 1{,}055} = 1607{,}69$ тыс. руб.

$S = 1607{,}69 \cdot 1{,}37883 = 2216{,}75$ тыс. руб.

Если же, например, платежи производятся 2 раза в год и первый член равен $200/2$ тыс. руб., то при всех остальных прочих условиях задачи согласно формулам (17.2) и (17.3) получим.

$A = \dfrac{200}{2} \cdot \dfrac{1{,}12^{12} \cdot 0{,}72525 - 1}{1{,}2 - 1{,}055^{1/2}} = 3162{,}13$ тыс. руб.

$S = 3162{,}13 \cdot 1{,}055^6 = 4360{,}08$ тыс. руб.

18. Конверсия финансовых рент

Иногда на практике требуется изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату финансовой ренты, т.е. необходимо *конвертировать* ренту. Этот процесс осуществляется на основе принципа эквивалентности, согласно которому платежи считаются эквивалентными, если их современные стоимости одинаковы.

К самым распространенным случаям конвертирования рент относятся:

1. *Выкуп ренты* – когда распределенные во времени платежи требуется заменить единственным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что вместо ренты выплачивается ее современная стоимость.
2. *Рассрочка платежей* – т.е. замена единовременного платежа аннуитетом (например, замена в коммерческом кредите платы за отгруженную продукцию). В этом случае по принципу финансовой эквивалентности современную величину ренты приравнивают к величине заменяемого платежа. И задача сводится к определению члена ренты или числа ее членов (т.е. срока).
3. *Замена рент* – когда рента с одним набором условий заменяется рентой с другими условиями. В этом случае приравниваются современные величины рент.

__**Пример 18.1**__ Цена партии продукции 1млн. руб. уплачивается в рассрочку в течение 3 лет. Кредит предоставляется из 10% годовых. Платежи производятся по полугодиям. Определить сумму члена ренты.

Решение. Предложена рента с параметрами A=1 млн. руб., p=2, m=1, i=0,1. Предположим, что покупателю предоставлена отсрочка на 3 месяца, причем проценты за время отсрочки присоединяются к цене. Находим цену товара на конец периода отсрочки:

$A' = A \cdot (1+i)^{\frac{t}{Y}} = 1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}1^{\frac{3}{12}} = 1024{,}11$ тыс. руб. Эта сумма будет погашена рентой с R, равным:

$$R = \frac{A'}{a^{(p)}(n;i)} = \frac{1024{,}11}{2{,}5475} = 401{,}999 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть теперь член ренты задан, тогда задача сводится к определению срока n. Для этого сначала рассчитывается коэффициент приведения $a(n;i) = \frac{A}{R}$, а затем определяется искомый срок n. Требуемые формулы приведены в таблице 18.1.

4. *Объединение (консолидация) рент*. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует $A = \sum_k A_k$, где A – современная величина заменяющей ренты, A_k – современная величина k-ой ренты, k=1,2,…. При объединении рент могут встречаться самые различные постановки задач: 1) определение размера члена заменяющей ренты $R = \frac{\sum A_k}{a(n;i)}$; 2) определение продолжительности заменяющей ренты $a(n;i) = \frac{\sum A_k}{R}$.

Таблица18.1 Формулы для расчета продолжительности постоянных рент.

Число платежей в году	Число раз начислений процен-тов в году	Современная величина ренты *(A)* Наращенная сумма ренты *(S)*	
p=1	m=1	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}\cdot i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}\cdot i+1\right)}{\ln(1+i)}$
	m>1	$n = \dfrac{\ln\left[1-\dfrac{A}{R}\cdot\left(\left(1+{j}/{m}\right)^{m}-1\right)\right]^{-1}}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}\cdot\left(\left(1+{j}/{m}\right)^{m}-1\right)+1\right]}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$
p>1	m=1	$n = \dfrac{\ln\left[1-\dfrac{A}{R}\cdot p\cdot\left((1+i)^{1/p}-1\right)\right]^{-1}}{\ln(1+i)}$	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{R}{R}\cdot p\cdot\left((1+i)^{1/p}-1\right)+1\right]}{\ln(1+i)}$
	m=p	$n = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}\cdot j\right)^{-1}}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$	$n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}\cdot j+1\right)}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$
	$m\neq p$	$n = \dfrac{\ln\left[1-\dfrac{A}{R}\cdot p\cdot\left(\left(1+{j}/{m}\right)^{m/p}-1\right)\right]^{-1}}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S}{R}\cdot p\cdot\left(\left(1+{j}/{m}\right)^{m/p}-1\right)+1\right]}{m\cdot\ln\left(1+{j}/{m}\right)}$

19. Характеристика ценных бумаг как финансовых инструментов

Из экономической теории известно, что весь товарный мир делится на две группы: собственно товары и деньги. В свою очередь, деньги могут быть просто деньгами и капиталом, т.е. деньгами, которые могут зарабатывать другие деньги. Деньги как капитал и являлись до сих пор предметом рассмотрения в данной дисциплине. На практике всегда имеется потребность в передаче денег от одного лица (юридического или физического) к другому. Существует два основных способа указанной передачи денег – через процесс кредитования и путем выпуска в обращение ценных бумаг.

Ценные бумаги – это форма существования капитала, отличная от его товарной, производительной и денежной форм, которая может передаваться вместо него самого, обращаться на рынке как товар и приносить доход.

Ценные бумаги еще называют финансовыми инструментами, т.к. в расширенном понимании – это любой документ, который может участвовать в финансовых операциях, то есть продаваться и покупаться по соответствующей цене. Это свойство ценных бумаг вытекает из понимания того, что ценная бумага значима не сама по себе, ее ценность состоит в тех правах, которые она дает своему владельцу. Последний обменивает свой товар или свои деньги на ценную бумагу только в том случае, если он уверен, что эта бумага ничуть не хуже, а даже лучше (удобнее), чем деньги или товар. А это удобство может быть связано с тем, что с одной стороны ценная бумага является формой регистрации (фиксации) рыночных отношений между участниками рынка, например, когда вместо оплаты за товар деньгами идет оплата ценными бумагами (допустим, выписанным векселем), что соответствующим образом фиксируется. С другой стороны, ценные бумаги – это особая форма существования капитала наряду с его существованием в денежной, производительной и товарной формах, в отличие, например, от банковской ссуды, которая является формой существования самого капитала, а не нечто отличное от него.

Ценные бумаги предоставляют своим владельцам возможность для выгодного вложения или получения денег взамен на финансовом рынке.

Итак, ценные бумаги, как финансовые инструменты, представляют из себя документы, которые могут участвовать в финансовых операциях:

1. *Акции* – единичный вклад в уставной капитал акционерного общества с вытекающими из этого правами;

2. *Облигации* – единичное долговое обязательство на возврат вложенной денежной суммы через установленный срок с уплатой или без уплаты определенного дохода.

3. *Банковский сертификат* – свободно обращающееся свидетельство о депозитном (сберегательном) вкладе в банк с обязательством последнего выплаты этого вклада и процентов по нему в установленный срок.

4. *Вексель* – письменное денежное обязательство должника о возврате долга, форма и обращение которого регулируются специальным законодательством – вексельным правом.

5. *Чек* – письменное поручение чекодателя банку уплатить чекополучателю указанную в нем сумму денег.

6. *Варрант* – документ, дающий его владельцу преимущественное право на покупку акций или облигаций какой-то компании в течение определенного срока времени по установленной цене.

7. *Опцион* – договор, в соответствии с которым одна из сторон имеет право, но не обязательство, в течение определенного срока продать (купить) у другой стороны соответствующий актив по цене, установленной при заключении договора, с уплатой за это право определенной суммы денег, называемой премией.

8. *Фьючерсный контракт* – стандартный биржевой договор купли-продажи биржевого актива через определенный срок в будущем по цене, установленной в момент заключения сделки и проч.

Ценные бумаги имеют ряд характеристик, важнейшими из которых являются *цена* (для облигаций – *курс*), *доходность* (текущая и полная), *ликвидность* и т.д. Для расчета доходности надо сопоставить получаемый по ней доход (аналог процентных денег I) с ценой приобретения (начальный вклад P). В случае, когда в расчет принимается полный доход за весь срок хранения, полученный инвестором как в виде дивидендов (D), так и за счет разницы в ценах продажи (P_1) и покупки (P_0), говорят о *полной доходности* ($j_{пол}$):

$$j_{пол} = \frac{\text{полный доход}}{\text{цена покупки}} = \frac{D + P_1 - P_0}{P_0} \quad (19.1)$$

Участниками рынка ценных бумаг широко используется еще одна характеристика – показатель *текущей доходности* ($j_{тек}$), учитывающей только текущий доход в расчете на текущую курсовую стоимость, т.е. на величину затрат, вложенных в ценную бумагу.

$$j_{тек} = \frac{\text{текущий доход}}{\text{текущая курсовая стоимость}} \quad (19.2)$$

Так, текущий доход для облигаций, приобретаемых с дисконтом (то есть по цене, ниже номинальной стоимости), например, для ГКО (Государственных краткосрочных обязательств), текущий доход определяется разницей между номиналом и текущей котировкой. В случае купонных облигаций – доходом, выплачиваемым по купонам; при определении текущего дохода по акциям в расчет принимаются только дивидендные выплаты. При решении конкретных задач формулы показателей доходности (19.1) и (19.2) уточняются как по видам ценных бумаг (различные типы облигаций, акций, срочных контрактов и т.д.), так и в зависимости от динамики курса, длительности учитываемого периода, потока дивидендов.

Мы рассматриваем здесь только ценные бумаги, приносящие фиксированный доход в виде процентов, иногда дивидендов, а именно: облигации, акции, депозитные сертификаты, веселя и фьючерсы. Доход в случае использования большинства из этих ценных бумаг представляет собой постоянный аннуитет (поток платежей).

Оценка облигаций

Наиболее распространенным видом ценной бумаги с фиксированным доходом является *облигация*. При необходимости привлечения значительных денежных средств государство, банки или другие финансовые институты, а также отдельные фирмы или их объединения прибегают к выпуску и продаже облигаций.

Определение. 19.1. Облигация (bond) – ценная бумага, удостоверяющая отношения займа между ее владельцем (кредитором) и лицом, выпустившим ее (заемщиком).

Облигация – это обязательство заемщика (эмитента облигации) перед кредитором (держателем облигации) выплатить определенную сумму в фиксированный момент времени в будущем и периодическую выплату назначенных процентов. С момента эмиссии и до погашения облигации продаются и покупаются по рыночным ценам. К основным параметрам облигации можно отнести:

1. *Номинальную или нарицательную стоимость (номинал)* – N, которая присваивается в момент эмиссии (выпуска) облигациям и которую заемщик обязуется вернуть держателю облигации при наступлении даты ее погашения.

2. *Дата погашения* – день, когда должна быть выплачена номинальная стоимость облигаций.

3. *Купон*, который характеризуется *купонной процентной ставкой* – отношением суммы процентов, выплачиваемых за год, к номинальной стоимости облигаций – q. Например, если ежегодно выплачиваются проценты в размере 2 тыс. руб. с облигации номиналом 10 тыс. руб., то $q = \frac{2}{10} \cdot 100\% = 20\%$. Купонный доход может выплачиваться периодически или один раз, например, при погашении облигации. Купонный доход часто рассматривается как текущий.

4. *Даты выплаты процентов.*

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, то есть владелец получает их номинальную стоимость. Рыночная цена в момент выпуска может быть равна номиналу, быть ниже номинала (с дисконтом) и выше номинала (с премией).

Так как номиналы у разных облигаций существенно различаются между собой (например, в США он может быть в диапазоне от 25$ до 10000$), то часто возникает необходимость в сопоставимом измерителе рыночных цен. Таким показателем является *курс* – процентное отношение цены облигации P к ее номиналу N:

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 \tag{19.3}$$

Например, если облигация с номиналом 1000 руб. продается за 920 руб., то ее курс 92,0.

Общий доход от облигации и любой другой ценной бумаги с фиксированным текущим доходом складывается из трех элементов:

1. Периодически выплачиваемого купонного дохода или начисления процентов;
2. Изменения стоимости облигации за соответствующий период времени (приближение ее к выкупной цене – N). Если $P<N$ – облигация была куплена с дисконтом, то изменение стоимости – положительная величина. Если она куплена с премией $P>N$, то это отрицательная величина, если $P=N$, то изменение стоимости отсутствует.
3. Доход от реинвестиции поступлений от купонов (эта величина играет роль при долгосрочных операциях).

Курс и доходность облигаций без погашения с периодической выплатой купонных процентов

Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов. Пусть ставка купона q=5%, ставка процента i=20%, номинал N. Тогда купонные ежегодные выплаты $R = q \cdot N$ образуют вечную ренту. Дисконтируя все эти выплаты по ставке i, получим современную величину этой ренты, что и есть теоретическая цена облигации P. То есть

$$P = \frac{qN}{i}. \tag{19.4}$$

(Ср. с формулой (16.5) для "вечной" ренты $A = \frac{R}{i}$).

Тогда при выплате купона раз в год

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 = \frac{qN}{Ni} \cdot 100 = \frac{q}{i} \cdot 100\,(\%). \tag{19.5}$$

$K = \frac{0{,}05}{0{,}20} \cdot 100 = 25$.Если выплата купонных денег происходит p раз в год в размере $\frac{qN}{p}$, то за год опять получаем qN. Для конечной ренты эти купонные выплаты $\frac{qN}{p}$ нужно дисконтировать по ставке $(1+i)^{1/p} - 1$. В нашем случае для облигации с неограниченным сроком купонных выплат получаем:

$$P = A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}\right] = \frac{R \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{p \cdot \left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{(1+i)^{1/p}-1}$$

Получаем формулу для расчета курса

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 = \frac{100q/p}{(1+i)^{1/p}-1}\,(\%) \tag{19.6}$$

Пусть теперь курс облигации известен. Найдем текущую доходность облигаций указанного типа. Если купонные выплаты производятся раз в год, то за год облигация приносит доход qN, а в нее вложено P, следовательно, доходность $j_{тек}$ согласно формуле (19.3) равна:

$j_{тек} = \frac{qN}{P}$ или $j_{тек} = \frac{qN}{KN} = \frac{q}{K}$ (если курс считать долей)

и

$$j_{тек} = \frac{q}{K} \cdot 100\ (\%). \tag{19.7}$$

Для облигаций рассматриваемого типа текущая и полная доходности совпадают.

Пример 19.1. Найти курс облигации без погашения с периодической – раз в год – выплатой процентов при q=8%, i=5%. Вычислить доходность такой облигации, если ее курс равен 120. Определить курс облигации, если выплаты производятся два раза в год.

Решение. Воспользуемся формулой (19.5)

$K = \frac{q}{i} \cdot 100 = \frac{0{,}08}{0{,}05} \cdot 100 = 160$ (%) и формулой (19.7)

$j_{тек} = \frac{q}{K} \cdot 100 = \frac{0{,}08}{120} \cdot 100 = 6{,}67$ (%)

Для нахождения курса при выплате купонов два раза в год используем формулу (19.6).

$$K = \frac{q}{(1+i)^{1/p} - 1} \cdot 100 = \frac{0{,}08}{2 \cdot (1{,}05^{1/2} - 1)} \cdot 100 = 162.$$

Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу

Доход от такой облигации получают как разницу между номиналом N при получении и ценой P. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Если облигация куплена за m лет до погашения, то, дисконтируя платеж N по ставке процента i к современному моменту, получим теоретическую цену облигации:

$P = \frac{N}{(1+i)^m}$, следовательно, курс облигации равен

$$K = \frac{P}{N} \cdot 100 = \frac{100}{(1+i)^m}. \qquad (19.8)$$

Для такой облигации курс всегда меньше 100.

Теперь найдем доходность облигации, считая цену известной. P, наращиваемая по пока неизвестной ставке доходности j, через m лет станет равной номиналу N, т.е. $N = P(1+j)^m$ или $N = \frac{KN}{100}(1+j)^m$, отсюда

$$j = \left(\frac{100}{K}\right)^{1/m} - 1. \qquad (20.9)$$

Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении

Проценты по такой облигации начисляются с капитализацией по сложной купонной ставке q и выплачиваются в конце срока одновременно с погашением. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Пусть q и i соответственно ставки купона и процента, через n лет после выпуска облигация будет погашена. То есть общая сумма, которую выплатят владельцу при погашении, равна $N(1+q)^n$. Пусть облигация куплена за m лет до погашения. Дисконтируя к этому моменту времени сумму $N(1+q)^n$ по ставке процента i, получим теоретическую цену облигации.

Итак,

$$P=\frac{N(1+q)^n}{(1+i)^m}. \tag{19.10}$$

Тогда курс облигации

$$K=\frac{P}{N}\cdot 100=\frac{(1+q)^n}{(1+i)^m}\cdot 100. \tag{19.11}$$

Теперь определим доходность облигации. Известна цена P, наращиваемая по ставке доходности j, через m лет должна вырасти до $N(1+q)^n$, поэтому имеем уравнение $P(1+j)^m=N(1+q)^n$, откуда $\frac{K}{100}(1+j)^m=(1+i)^n$ и далее

$$j=\left(\frac{100}{K}\right)^{1/m}(1+q)^{n/m}-1. \tag{19.12}$$

Пример 19.2. Найти курс бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении за 5 лет до погашения при i=4%, если облигация выпущена на 10 лет и q=8%. Вычислить доходность такой облигации, если ее курс равен 100.

Решение. Для нахождения курса воспользуемся формулой (19.11).

$$K=\frac{(1+q)^n}{(1+i)^m}\cdot 100=\frac{(1+0{,}08)^{10}}{(1+0{,}04)^5}\cdot 100=177.$$

Доходность определяется по формуле (19.12)

$$j=\left(\frac{100}{K}\right)^{1/m}(1+q)^{n/m}-1=\left[\frac{100}{100}\right]^{1/5}(1+0{,}08)^{10/5}-1=0{,}1664 \text{ или } 16{,}64\%$$

Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением

Это самый общий тип облигаций. Суммарный доход от облигаций данного типа складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже облигаций, или от погашения облигаций – здесь доход может определяться разницей ставок процента при выпуске облигации и в момент ее погашения. Купонные выплаты формируют текущую доходность.

Пусть q и i – ставки купона и процента. Если облигация куплена за m лет до погашения, то будущие купонные доходы qN – есть годовая рента и ее современная величина есть $P'=qN\cdot a(m;i)$, где $a(m;i)$ – коэффициент приведения этой ренты, то есть $a(m;i)=\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}$. Кроме того, чтобы определить теоретическую цену облигации P сюда следует добавить и современную величину номинала $P'' = \dfrac{N}{(1+i)^{-m}}$.

Тогда

$$P = P' + P'' = qN\frac{1-(1+i)^{-m}}{i} + \frac{N}{(1+i)^{m}}. \tag{19.13}$$

Следовательно, курс облигации

$$K = \frac{P}{N}\cdot 100 = 100\cdot\left[(1+i)^{-m} + q\cdot\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right]. \tag{19.14}$$

Оценка акций

Другим важным финансовым инструментом является акция.

Акция (stock) – ценная бумага, владелец которой имеет право на получение дивидендов с определенной периодичностью (например, раз в квартал, раз в год и т.д.). Акции не имеют установленного срока в обращении и выпускаются акционерными обществами для финансирования своей деятельности.

Владелец привилегированной акции имеет право на получение заранее установленных дивидендов в первую очередь, но не имеют право голоса на собрании акционеров. Владелец обыкновенной акции имеет право голоса на собрании акционеров и получает дивиденды, определяемые по итогам хозяйственной деятельности.

В отличие от облигаций акции не имеют фиксированного срока обращения. Они могут продаваться и приобретаться по рыночным ценам.

“Вечная” акция

Доход от такой акции получают только в виде дивидендов (D), то есть ее продажа не предусмотрена. Поэтому теоретическую цену акции P определяют как дисконтированную к современному моменту вечную ренту:

$P = \dfrac{D}{i}$, если дивиденды выплачиваются 1 раз в году и $P = \dfrac{D}{\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}$, если выплаты дивидендов происходят p раз в году.

20. Оценка инвестиционных проектов

В нормальной экономике вращение внутри самой финансовой сферы не может принести большого дохода. Только выход в реальный сектор экономики путем инвестирования позволяет нарастить капитал. Инвестиции необходимы – с одной стороны, – для обновления материально-технической базы, расширения объемов производства, освоения новых видов деятельности, с другой – для получения существенного экономического дохода в будущем. Нужно уметь анализировать инвестиционные процессы. Такие процессы – это потоки платежей, в которых инвестиции отрицательны, а доходы положительны.

Привлекательность того или иного инвестиционного проекта характеризуется следующими основными параметрами:

- Объем затрат – *чистые инвестиции (вложенный капитал) – K*;
- Поступления – ежегодные платежи *R*;
- Чистая текущая стоимость поступлений $A_R = R \cdot a(n;i)$, где *n* – срок инвестиционного проекта (нормативный срок), *i* – процентная ставка для инвестиций и дохода;
- Современная стоимость капиталовложений (в том случае, если вложенные средства вносятся несколькими платежами, распределенными во времени или если присутствуют отсроченные инвестиции) $A_K = \sum_1^n K_n \cdot a(n;i)$, где K_n - инвестиционные расходы за в каждый их *n* периодов.
- Потенциальные выгоды – *чистый денежный поток (доход)* от деятельности (чистый приведенный доход – *net present value, **NPV***). Рассчитывается как разность дисконтированных показателей чистого дохода (современной величины ренты A_R) и вложенного капитала *K: NPV*= $R \cdot a(n;i)$ -*K*;
- Период, в течение которого инвестиционный проект будет давать доход, – *жизненный цикл инвестиции* (рассматриваются также как дисконтный срок окупаемости – *discounted payback method* − $n_{док}$). Устанавливается из соотношения $K = R \cdot a(n_{док};i)$;
- Внутренняя норма доходности ***q*** (*internal rate of return*) – относительная мера эффективности реализации инвестиционного проекта. Внутренняя норма доходности находится из условия, что *NPV*=0 при $K = R \cdot a(n;q)$. Т.е. под этим критерием понимают такую расчетную ставку приведения, при которой капитализация получаемого дохода дает сумму, равную инвестициям и, следовательно, капиталовложения только окупаются.
- Доходность проекта (индекс доходности – *profitability index*) ***PI***. Определяется как отношение $R \cdot a(n;i)$ к *Inv*.
- Высвобождение капитала в конце срока экономической жизни инвестиций – *ликвидационная стоимость*.

Пример 20.1. На строительство магазина надо затратить 10000 тыс. руб., а затем в течение 10 лет магазин будет давать доход 3000 тыс. руб. в год. Ставка процентов 8% в год. Найти характеристики проекта.

Решение. Пусть *K* – размер инвестиций; *R* – последующий годовой доход в течение *n* лет; *i* – ставка процента для инвестиций и дохода. Имеем поток доходов, который является конечной годовой рентой с платежом *R* и сроком ренты *n* лет. Необходимо рассчитать следующие параметры:

1) Современная величина ренты $A_R = R \cdot a(n;i) = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, т.е.

$$A_R = R \cdot a(10;8) = R\frac{1-(1+0{,}08)^{-10}}{0{,}08} = 3000 \cdot 6{,}710 = 20130 \text{ тыс. руб.;}$$

Чистый приведенный доход *NPV*= $R \cdot a(n;i)$ -*K*=20130-10000=10130 тыс. руб.;

Так как *NPV*>0, то проект является рентабельным по этому показателю.

2) Внутренняя доходность q должна удовлетворять уравнению $K + R \cdot a(n;q) = 0$, т.е. $a(10;q) = \dfrac{1-(1+q)^{-10}}{R} = \dfrac{K}{R} = \dfrac{10000}{3000} = 3{,}33$. По таблице для $a(n;q)$ подбираем $q \approx 0{,}27$ или 27%. Полученная величина больше 8%, заявленных в проекте, поэтому по данному показателю проект считается рентабельным.

3) Дисконтный срок окупаемости находим из формулы $K = R \cdot a(n_{док};i)$, т.е. $a(n_{док};i) = \dfrac{K}{R} = \dfrac{10000}{3000} = 3{,}33$ и по таблице $n_{док} \approx 4$ года. То есть примерно за 4 года вложенная сумма инвестиций окупится будущими поступлениями. Начиная с пятого года проект будет приносить доход;

4) Индекс доходности $PI = \dfrac{Ra(n;i)}{K} = \dfrac{20130}{10000} = 2{,}013$. Так как *PI*>1, то проект является рентабельным (при *PI*=1 проект будет иметь нулевую доходность).

Таким образом, исходя из расчета основных четырех параметров инвестиционного проекта, данный проект является рентабельным.

Для оценки инвестиций с помощью MS Excel можно использовать следующие функции:

1. Чистая текущая (приведенная) стоимость рассчитывается с помощью финансовой функции **ЧИСТНЗ.** Она возвращает чистую текущую стоимость инвестиций, вычисляемую на основе нормы скидки ряда периодических поступлений наличных, которые не обязательно являются периодическими.
2. Для расчета внутренней нормы доходности используется финансовая функция **ЧИСТВНДОХ**. Она возвращает внутреннюю норму всего потока платежей для расписания денежных поступлений (не обязательно периодических).
3. При промежуточных расчетах параметров инвестиций, например, современной величины будущих поступлений по инвестициям, можно использовать финансовую функцию **ПС**, которая возвращает текущий объем платежей, т.е. общую сумму, которую составят эти платежи. Для определения неизвестного количества периодов выплат ренты (инвестиционных выплат) можно использовать финансовую функцию **КПЕР**, которая возвращает общее количество периодов (лет, месяцев и т.д.) выплаты для данного вклада на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

РАЗДЕЛ II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ.

1. Производственные функции и их основные свойства.

Производственные функции (ПФ) являются важным инструментом моделирования экономических объектов. Производственные функции выражают технологическую зависимость между затратами факторов производства и результатом деятельности экономического объекта. В качестве технологических факторов производства (входных переменных) чаще всего выступают живой труд (L), а также овеществленный труд (K) - предметы и средства труда, земля. Результатом (выходной переменной) является выпуск продукции (X) экономического объекта, в качестве которого может выступать фирма, экономика региона, страны и т.д. Производственную функцию можно рассматривать в виде «черного ящика», преобразующего входы в выход экономического объекта. Таким образом, ПФ имеет вид

$$X = F(K, L) \qquad (1.1).$$

ПФ (1.1) называется неоклассической, если она является гладкой, т.е. первая производная непрерывна, и удовлетворяет следующим естественным экономическим свойствам:

1. $F(0, L) = F(K, L) = 0$, т.е. при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно. (Строго говоря, эта ситуация не всегда может быть верна. Например, реально имеет место случай с использованием минимального количества живого труда по сравнению с капиталом: локомотив с нефтяными цистернами и один машинист).

2. $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$, т.е. с ростом ресурсов выпуск растет.

3. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, т.е. с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется. Это свойство показывает так называемый закон убывающей эффективности.

Если у функции первая производная положительна, а вторая отрицательна, то это вогнутая функция. Исходя из трех перечисленных свойств, построим график ПФ по одной переменной, зафиксировав вторую. Он изображен на рис.1.1.

4. $F(\infty, L) = F(K, \infty) = \infty$, т.е. при неограниченном увеличении одного из ресурсов, выпуск неограниченно растет.

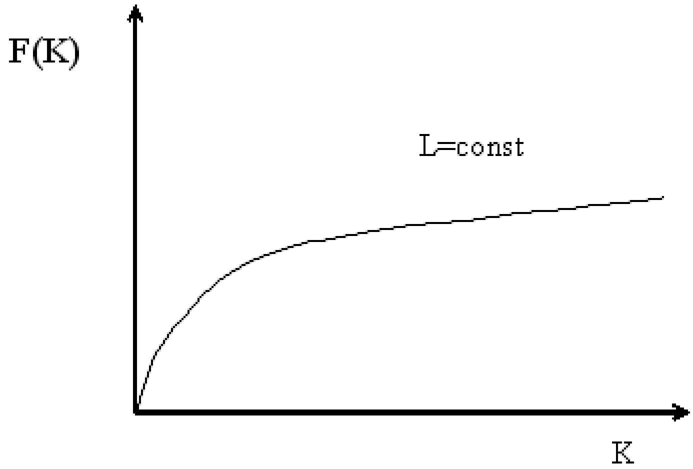

Рис.1.1. График производственной функции при L=const

Производственные функции могут быть одно- и многофакторными. Для экономистов представляют интерес мультипликативные производственные функции (МПФ), где в качестве входных переменных выступают труд (L) капитал (K), а выходным фактором – выпускаемая продукция (X).

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}, \alpha_i > 0, \tag{1.2}$$

где A, α_1, α_2 - параметры, подлежащие определению.

В качестве примера приведем МПФ валового выпуска РФ (в млрд. руб.) в зависимости от стоимости ОПФ (млрд. руб.) и числа занятых в народном хозяйстве (млн. чел.) по данным за 1960-1994 гг. (все стоимостные показатели даны в сопоставимых ценах для этого периода).

$$X = 0{,}931 \cdot K^{0{,}539} \cdot L^{0{,}594} \tag{1.3}$$

В математике среди характеристик функций есть понятие их однородности и неоднородности. Например, рассмотрим функцию n *переменных:*

$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = y(x_1, x_2, \ldots x_n)$. *Эта функция называется однородной порядка (степени)* m, *если для всякого* $\mu > 0$ *имеет место соотношение:*

$y(\mu x_1, \mu x_2, \ldots \mu x_n) = f(\mu x_1, \mu x_2, \ldots \mu x_n) = \mu^m f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. *Если условие не выполняется, то функция однородной не является.*

<u>Пример.</u> Дана первая функция $y(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{\,2}$.

Проверим, является ли функция однородной.

$y(\mu x_1, \mu x_2) = \mu x_1 + (\mu x_2)^2 = \mu(x_1 + \mu x_2^{\,2})$.

Функция $y(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{\,2}$ *однородной не является.*

Дана вторая функция $y(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

Проверим, является ли функция однородной.

$y(\mu x_1, \mu x_2) = \mu x_1 \cdot \mu x_2 = \mu^2 x_1 x_2$. *Функция однородна со степенью однородности*

МПФ отражает масштаб производства. Это означает, что одновременное изменение факторов в μ раз дает изменение выпускаемой продукции в $\mu^{\alpha_1+\alpha_2}$ раз или $X = A\cdot(\mu K)^{\alpha_1}\cdot(\mu L)^{\alpha_2} = \mu^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}$.

Если

а) $\alpha_1+\alpha_2>1$, то имеет место положительный эффект масштаба производства. В этом случае целесообразно расширять производство. Этот способ развития называется *интенсивным.*

Б) $\alpha_1+\alpha_2<1$, то с одновременным увеличением входных факторов в μ раз выпуск увеличивается менее, чем в μ раз. Такое производство нецелесообразно расширять.

В) $\alpha_1+\alpha_2=1$, то при одновременном увеличении входных факторов в μ раз, выпуск увеличивается также в μ раз. Этот способ развития называется *экстенсивным.*

МПФ третьего вида носит название функции Кобба-Дугласа по имени двух ученых Ч.Кобба и П.Дугласа, рассчитавших ПФ для экономики США.

Ее можно записать как

$$X = A\cdot K^{\alpha}L^{1-\alpha} \tag{1.4}$$

Докажем, что МПФ удовлетворяет свойствам 2 и 3 (1 и 4 свойства очевидны).

Дифференцируя (1.2) по K получим

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1\cdot A\cdot K^{\alpha_1-1}\cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1\cdot\frac{A\cdot K^{\alpha_1-1}\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}}{K} = \alpha_1\cdot\frac{X}{K}>0,$$

т.к. по экономическому смыслу X и K. Аналогично

$$\frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2\cdot A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2-1} = \alpha_2\cdot\frac{A\cdot L^{\alpha_2-1}\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}}{L} = \alpha_2\cdot\frac{X}{L}>0.$$

Докажем, что при $\alpha_1<1$ и $\alpha_2<1$ МПФ удовлетворяет свойству 3.

Из (1.2) имеем

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \alpha_1\cdot A\cdot L^{\alpha_2}\cdot(\alpha_1-1)\cdot K^{\alpha_1-2} = \frac{K^2\cdot\alpha_1\cdot A\cdot L^{\alpha_2}(\alpha_1-1)\cdot K^{\alpha_1-2}}{K^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1\cdot(\alpha_1-1)\cdot X}{K^2}<0,\ \text{при}\ \alpha_1<1$$

Аналогично $\dfrac{\partial^2 X}{\partial L^2} = \dfrac{\alpha_2\cdot(\alpha_2-1)\cdot X}{L^2}<0$.

Т.е. МПФ (1.2) является неоклассической ПФ.

2. Предельные и средние эффективности факторов производства

Средняя эффективность факторов – это выпуск продукции, приходящийся на единицу затрат соответствующего фактора.

Имеем

$Z = \dfrac{X}{K}$ - средняя фондоотдача,

$f = \dfrac{X}{L}$ - средняя производительность труда.

$k = \dfrac{K}{L}$ - средняя фондовооруженность.

Предельной эффективностью является отношение прироста выпуска продукции, приходящегося на дополнительную единицу затрачиваемого фактора производства.

Целесообразно рассмотреть предельную эффективность сначала в дискретном варианте, так как экономисты пользуются информацией, заданной дискретно в виде таблиц, рядов и т.п.

$$\frac{\Delta X}{\Delta K} = \frac{F(K+\Delta K; L) - F(K; L)}{\Delta K}, \ \frac{\Delta X}{\Delta L} = \frac{F(K; L+\Delta L) - F(K; L)}{\Delta L}.$$

Для теоретических исследований рассматривают предельную эффективность в непрерывном варианте: отношение прироста выпуска продукции к разности значений фактора, стремящейся к нулю, что, по определению, есть частная производная по соответствующему фактору.

$$\lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta K} = \frac{\partial X}{\partial K}, \ \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta L} = \frac{\partial X}{\partial L}.$$

Предельную эффективность также называют предельной производительностью или мажоральной производительностью.

Предельная производительность по капиталу, или предельная фондоотдача, - это частная производная выпуска продукции по капиталу.

$$Э_{XK} = \frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \cdot A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{A \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}}{K} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K} = \alpha_1 \cdot Z. \quad (2.1)$$

Предельная производительность по труду, или предельная трудоемкость, это частная производная выпуска продукции по труду.

$$Э_{XL} = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \cdot A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \alpha_2 \cdot \frac{A \cdot L^{\alpha_2 - 1} \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}}{L} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L} = \alpha_2 \cdot f. \quad (2.2)$$

Таким образом, предельная эффективность показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска на дополнительную достаточно малую единицу затрат труда. Предельная эффективность – размерная величина. Она такая же, как и у средней эффективности.

Однако иногда необходимо сопоставить влияние на выпуск продукции разных факторов. Для этого используют эластичность функции по фактору. Она показывает, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении фактора на один процент. В дискретном варианте это

$$\frac{\dfrac{\Delta X}{X}}{\dfrac{\Delta K}{K}} = \frac{\Delta X}{\Delta K}\cdot\frac{K}{X} = \frac{\Delta X}{\Delta K}\Big/\frac{X}{K}, \quad \frac{\dfrac{\Delta X}{X}}{\dfrac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta X}{L}\cdot\frac{L}{X}. = \frac{\Delta X}{\Delta L}\Big/\frac{X}{L}$$

В непрерывном варианте

$$\frac{\partial X}{\partial K}\Big/\frac{X}{K} = \alpha_1, \ \frac{\partial X}{\partial L}\Big/\frac{X}{L} = \alpha_2.$$

Иными словами, эффективность функции по фактору – это отношение предельной производительности к средней. Коэффициент эластичности по фактору показывает, на сколько процентов увеличиться выпуск, если фактор возрастет на 1%. Например, согласно (1.3) при увеличении ОФ на 1% валовой выпуск повысится на 0,539%, а при увеличении числа занятых на 1% - на 0,594%.

Для функции Кобба-Дугласа эластичности выпуска по соответствующим факторам (*K* и *L*) соответственно равны α и 1-α.

Другой параметр *A* – можно определить, представив *K*=1 и *L*=1. Тогда *X*=*A*. То есть *A* – выпуск продукции при единичных затратах труда и капитала, который не зависит от прочих характеристик производственного процесса.

Иногда *A* называют коэффициентом технического прогресса, а параметры α_1 и α_2 - соответственно коэффициентами эластичности по фондам и по труду. Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то говорят о трудоемких производствах. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то – о фондоемких.

3. *Изокванты*

Изоквантой (линией уровня) ПФ на плоскости *OKL* называется множество тех точек, для которых выполняется равенство.

$$F(K,L) = X_0 = const.$$

Для МПФ изокванты описываются равенством

$$A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2} = X_0, \text{ т.е. } K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A\cdot L^{\alpha_2}} \text{ или } K = \left(\frac{X_0}{A\cdot L^{\alpha_2}}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Это степенная гипербола, асимптотами которой являются оси координат. Вид таких гипербол показан на рис. 3.1 для разных X_0. Причем $X_0^1 < X_0^2$, т.е. чем выше расположена кривая, тем большему выпуску продукции она соответствует.

Из уравнения изокванты найдем предельную норму замещения факторов производства. На изокванте прирост продукции равен нулю, что означает равенство нулю полного дифференциала

$$dX = \frac{\partial X}{\partial K}dK + \frac{\partial X}{\partial L}dL = 0.$$

Отсюда $\dfrac{\partial X}{\partial K}dK = -\dfrac{\partial X}{\partial L}dL$, $dK = -\dfrac{\partial X/\partial L}{\partial X/\partial K}dL$.

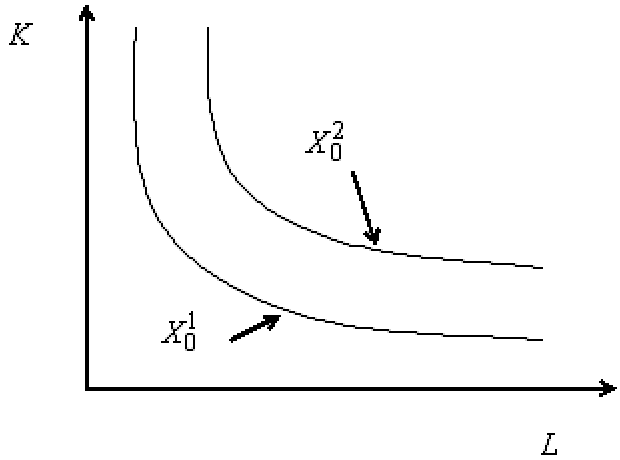

Рис. 3.1. Изокванты

Так как по свойству 2 в этом соотношении $\frac{\partial X}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial X}{\partial L} > 0$, то dK и dL имеют разные знаки, то есть если фонды возрастают, то трудовые ресурсы должны убывать.

4. *Предельная норма замещения и эластичность замещения*

Предельной нормой замещения труда фондами S_{LK} называют отношение дифференциалов капитала к труду.

$S_{LK} = \frac{dK}{dL} = \frac{\partial X / \partial L}{\partial X / \partial K} = \frac{\alpha_2 K}{\alpha_1 L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k$ − пропорциональна фондовооруженности, т.е. недостаток труда можно компенсировать его лучшей фондовооруженностью. Предельная норма замещения показывает, на сколько должны снизиться (возрасти) затраты капитала при увеличении (сокращении) затрат труда и при условии, что объем производства не изменится. Таким образом, мы можем получить оценку одного производственного фактора (например, труда) в единицах другого. Пользуясь графиком изокванты и определением предельной нормы замещения мы выявляем определенный экономический смысл, − по мере того, как один из производственных факторов (в нашем случае труд) становиться все менее дефицитным, он получает все меньшую оценку в единицах другого производственного фактора (капитала). Ситуация с вытеснением живого труда капиталом характерна для США и развитых стран Европы. Для других государств скорее характерна противоположная тенденция.

Введем понятие эластичности замещения труда капиталом σ. Она показывает, на сколько процентов измениться фондовооруженность $k = \frac{K}{L}$, при изменении предельной нормы замены труда капиталом на один процент, и в дискретном варианте выражение имеет вид:

$\sigma = \frac{\Delta k / k}{\Delta S_{LK} / S_{LK}}$, в непрерывном варианте $\sigma = \frac{dk / k}{dS_{LK} / S_{LK}} = \frac{d \ln k}{d \ln S_{LK}}$.

Для производственной функции Кобба-Дугласа эластичность выпуска по капиталу равна α, а эластичность выпуска по труду равна $1-\alpha$. Предельная норма замещения равна $S_{LK} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot k$ (где $k = \frac{K}{L}$) и эластичность замещения $\sigma = \frac{dk}{dS_{LK}} \cdot \frac{S_{LK}}{k} = \frac{dk}{k} \cdot \frac{k \cdot (1-\alpha)/\alpha}{dk \cdot (1-\alpha)/\alpha} = 1$.

Аналогично, предельная норма замены фондов (капитала) трудом $S_{KL} = \frac{dL}{dK} = \frac{\partial X / \partial K}{\partial X / \partial L}$. Очевидно, что $S_{LK} \cdot S_{KL} = 1$.

Пример 4.1. Пусть $X = 1{,}21 \cdot K^{0{,}8} \cdot L^{0{,}4}$. Вычислим характеристики этой функции для способа производства, при котором K=100, L=200, и, следовательно,

$$X = 1{,}21 \cdot 100^{0{,}8} \cdot 200^{0{,}4} = 400.$$

Предельные производительности факторов при этом способе производства

$$Э_{XK} = \frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K} = 0{,}8 \cdot \frac{400}{100} = 3{,}2$$

$Э_{XL} = \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L} = 0{,}4 \cdot \frac{400}{200} = 0{,}8$, а предельная норма замещения труда капиталом

$$S_{LK} = \frac{\alpha_2 K}{\alpha_1 L} = \frac{0{,}4}{0{,}8} \cdot \frac{100}{200} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Эластичность замещения труда капиталом

$$\sigma = \frac{dk / k}{dS_{LK} / S_{LK}} = \frac{d \ln k}{d \ln S_{LK}}$$

Заданная функция однородная степени $m = \alpha_1 + \alpha_2 = 0{,}8 + 0{,}4 = 1{,}2$. Это соотношение показывает, что в моделируемом процессе пропорциональному изменению обоих факторов в μ раз должно соответствовать изменение выпуска в μ^m. Так как $m = \alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то имеет место интенсивный способ развития производства.

5. *Масштаб и эффективность производства*

При изучении факторов роста экономики выделяют *экстенсивные* факторы роста (за счет увеличения затрат ресурсов, т.е. увеличения производства) и *интенсивные* факторы роста (за счет повышения эффективности использования ресурсов).

Рассмотрим, как с помощью МПФ выразить *маситаб* и *эффективность производства*.

Используя относительные показатели, запишем МПФ в следующем виде

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2} \quad (5.1),$$

где $X_0,\ K_0,\ L_0$ – значения выпуска и затрат фондов и труда в базовый год. Очевидно, что

$A = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} \cdot L_0^{\alpha_2}}$, т.е. коэффициент A соизмеряет ресурсы с выпуском.

Если обозначить выпуск и ресурсы в относительных (безразмерных) единицах через $\tilde{X},\ \tilde{L},\ \tilde{K}$, то МПФ примет вид

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \cdot \tilde{L}^{\alpha_2} \quad (5.2),$$

где $\tilde{K} = \frac{K}{K_0},\ \tilde{L} = \frac{L}{L_0},\ \tilde{X} = \frac{X}{X_0}$.

Выразим эффективность экономики, представленной МПФ (1). По определению, эффективность – это отношение результата к затратам. В нашем случае имеют место два вида затрат:

- затраты прошлого труда в виде фондов $\tilde{K}$;
- затраты настоящего труда $\tilde{L}$.

Поэтому имеются два частных (безразмерных) показателя эффективности: $\tilde{X}/\tilde{K}$ - фондоотдача, $\tilde{X}/\tilde{L}$ - производительность труда. Найдем среднее из них. Так как ПФ выражена в мультипликативной форме, то и среднее возьмем в такой же форме, т.е. возьмем среднее геометрическое значение.

Среднее геометрическое двух величин a_1 и a_2*:* $\sqrt{a_1 \cdot a_2} = a_1^{\frac{1}{2}} \cdot a_2^{\frac{1}{2}}$*, среднее геометрическое n чисел:* $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$. *Взвешенное среднее геометрическое n величин* a_i*:* $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i},\ 0 < \alpha_i < 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha$ *- весовые показатели.*

Взвешенное среднее геометрическое частных показателей экономической эффективности дает обобщенный показатель, который вычисляется по формуле:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \quad (5.3)$$

где

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2},\ \ 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\ -$$

относительные эластичности, исполняющие роль весов.

Выразим масштаб производства по МПФ (1.2).

Поскольку масштаб производства M зависит от затраченных ресурсов, то средний размер используемых ресурсов должен стоять в правой части формулы вычисления M, т.е.

$$\tilde{X} = E \cdot M \tag{5.4}$$

Из формул (5.3) и (5.4) вытекает, что объем выпуска $\tilde{X} = E \cdot M$, т.е. выпуск равен произведению эффективности и масштаба производства.

<u>Пример 5.1</u>. Рассмотрим найденную по данным за 1960-1995 гг. МПФ ВВП США, т.е. функцию

$$X = 2{,}248 \cdot K^{0{,}404} \cdot L^{0{,}803}$$

Известно, что ВВП США, измеренный в млрд. дол. в ценах 1987 г., возрос с 1960 г. по 1985 г. в 2,82 раза, т.е. $\tilde{X} = X / X_0 = 2{,}82$. Увеличение ОПФ и трудовых ресурсов за этот период характеризуется величинами $\tilde{K} = 2{,}88,\ \tilde{L} = 1{,}93$. Найдем показатели масштаба и эффективности производства, обеспечивающие этот рост.

Найдем относительные эластичности по фондам и труду:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = \frac{0{,}404}{1{,}207} = 0{,}3347;$$

$$1 - \alpha = 1 - 0{,}3347 = 0{,}6653$$

Далее

$$\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98; \quad \frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46.$$

Следовательно, обобщенный показатель эффективности E (5.3) равен

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha} = 0{,}98^{0{,}3347} \cdot 1{,}46^{0{,}6653} = 1{,}278.$$

Найдем масштаб производства

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha} = 2{,}88^{0{,}3347} \cdot 1{,}93^{0{,}6653} = 2{,}207.$$

Таким образом, общий рост ВВП с 1960 г. по 1995 г. в 2,82 раза произошел за счет роста масштабов производства в 2,207 раза и за счет повышения эффективности производства в 1,278 раз.

РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

1. Общие закономерности экономического функционирования производственно-сбытового предприятия. Статические однопродуктовые модели.

Согласно теории экономического управления предприятием основными факторами, влияющими на экономическую эффективность выпуска продукции, являются: себестоимость ее производства и сбыта, оптовая цена продажи, общее время на ее реализацию. Чем больше разность между оптовой ценой единицы продукции и ее себестоимостью, чем меньше время на реализацию произведенной продукции, тем выше будет полученный за определенный период времени объем выручки за выпущенную предприятием продукцию.

Для целей моделирования, анализа и принятия решений для эффективного управления деятельностью производственного предприятия используем разделение затрат предприятия по отношению к объемам производимой продукции на постоянные и переменные. Постоянные затраты не зависят от объёма произведенной продукции и включают арендную плату за землю, помещения и оборудование, плату за телефон, Интернет, затраты на охрану, платежи за ранее полученные кредиты (финансовые и товарные), плату за энергоресурсы, используемые в непроизводственной сфере, заработную плату непроизводственному персоналу и начисления на неё, затраты на службу маркетинга, снабжения и т.д. Они оказывают существенное влияние на ее себестоимость. При этом, если сокращается объем выпуска и продаж продукции, то постоянные затраты резко увеличивают ее себестоимость.

Основными элементами хозяйственного механизма являются объем производства продукции; издержки (затраты) производства; цена; объем реализации; выручка от продажи продукции или услуг; прибыль; наличие финансовых, трудовых и производственных ресурсов. Все эти элементы находятся в определенной функциональной зависимости друг от друга. Так, например, минимальная цена продукции (товара) определяется ее себестоимостью (переменными и постоянными затратами), а максимальная – наличием каких-либо уникальных свойств или повышенным спросом.

На объем производства продукции оказывает существенное влияние объем ее реализации, от которого зависит получаемая сумма выручки. Она, в свою очередь является основным элементом финансовых ресурсов предприятия, за счет которых обеспечивается приобретение необходимых материальных (сырья, топлива, материалов, энергии, комплектующих) и трудовых (оплата труда персонала, платежи во внебюджетные фонды) ресурсов, внесение налоговых взносов, амортизационных отчислений для компенсации износа основных фондов.

Для принятия обоснованных управленческих решений требуется использовать аналитические модели, которые при известных исходных данных позволяют обеспечить достаточно точное количественное решение, а в условиях неопределенности находить область допустимых решений и избежать грубых ошибок при управлении предприятием.

Под термином «модель» понимается описание рассматриваемого явления (процесса), выражаемое в виде математических уравнений, графических отображений, логических схем, отражающих главные внутренние взаимосвязи и отношения между основными элементами (параметрами) изучаемого явления (процесса).

Для построения математических моделей примем следующие допущения:

1. Предприятие в процессе производственно-сбытовой деятельности (для упрощения введем аббревиатуру ПСП для обозначения предприятий с преобладанием такого вида деятельности) реализует продукцию на сторону по отпускным (оптовым) ценам, включающим налог на добавленную стоимость (НДС), если иное не оговорено.
2. В течение расчетного периода цена на продукцию не меняется.
3. Рынок изучен, стабилен и имеется статистика реализации продукции во времени после ее изготовления.
4. Предприятие обеспечено необходимыми трудовыми ресурсами, оборудованием и площадями, в течение времени моделирования технология производства не меняется.
5. В балансовом уравнении (БУ) учитываются все поступающие средства в денежном выражении (включая НДС в выручке) и все затраты в денежном выражении (включая налоги и платежи, не учитываемые в затратах на производство и реализацию продукции).
6. На формирование собственного (резервного) фонда идет вся прибыль, остающаяся в распоряжении предприятия после всех установленных законодательством вычетов и уплаты налога на прибыль, что соответствует величине чистой прибыли. Накопленные суммы резервного фонда могут при необходимости расходоваться по решению руководства предприятия на погашение издержек производства и реализации и уплату налогов и платежей в бюджет и внебюджетные фонды.

Рассмотрим деятельность ПСП, производящего один вид продукции, в некий промежуток времени.

Введём в обращение следующие обозначения: U – переменные затраты на единицу произведенной продукции; Z – постоянные затраты предприятия; X – объёмы производства предприятия (количество выпущенной продукции); C^c – себестоимость единицы продукции для бесприбыльного производства; C – отпускная цена единицы продукции; H – налоги и платежи (не учтенные в затратах) в бюджет согласно законодательству; B – выручка от реализации продукции (работ, услуг); C^r – собственные финансовые средства; C^b – полученные займы и кредиты на производство и реализацию продукции.

Эти величины связаны между собой следующими зависимостями, отражающими ряд основных законы экономического функционирования предприятия.

Закон массового производства: *Постоянные затраты на единицу продукции уменьшаются с увеличением количества произведенной продукции.*

$$C^c = U + \frac{Z}{X}.$$

Закон возмещения затрат. *Цена единицы продукции должна обеспечивать покрытие (возмещение) переменных и постоянных затрат, приходящихся на единицу продукции, и обеспечивать рациональный уровень прибыли, приходящийся на единицу продукции.*

$$C = U + \frac{Z}{X} + \frac{P}{X}.$$

Закон самофинансирования выпуска продукции. *Должен выполняться баланс затрат на планируемый объем **X** выпуска продукции с учетом налогов и получаемой в этот период выручкой **XC** за реализованную продукцию.*

$$CX^r \geq (UX + Z) + H.$$

Это закон требует выполнения следующего требования к объему реализованной продукции:

$$X^r \geq \frac{(UX + Z) + H}{C},$$

которое является одним из главных требований к службе маркетинга предприятия.

Затраты предприятия на выпуск и реализацию продукции в объёме X вычисляются по формуле:

$$S = UX + Z.$$

Если X^r – объём реализованной продукции, а C – цена единицы продукции, по которой она реализована, то

$$B = CX^r.$$

В соответствии с законом массового производства себестоимость C^c должна уменьшаться с увеличением объема X выпускаемой продукции за счет распределения постоянных затрат Z на больший объем продукции X.

Из закона уменьшения себестоимости продукции в зависимости от объема выпуска и срока ее нахождения в серийном производстве следует важный вывод для экономического управления предприятием: частая замена выпускаемой продукции невыгодна предприятию ввиду малого срока ее нахождения в серийном производстве.

Часто возникает необходимость решать вопрос о том, следует ли дальше продолжать производство данной продукции. Этот вопрос может возникнуть, если при оценке финансовых возможностей предприятия за фиксированное время – день, месяц, квартал, год, предприятие оказывается в ситуации, когда полученный объем выпущенной и реализованной продукции ниже того, который обеспечивает предприятию не только покрытие всех затрат, но и прибыль, т.е. превышает некоторый объем $X_{бу} = \dfrac{Z}{C - U}$ ($X_{бу}$ – безубыточный объем производства или критическая точка объема). Следует при этом учесть данные о располагаемых собственных финансовых средствах C^r, полученных кредитах C^b, поступлениях выручки B, постоянных затратах предприятия Z, переменных затратах на одно изделие U, оптовой цене C за это же фиксированное время. При $X < X_{бу}$ производство данного изделия при имеющихся затратах будет убыточным и необходимо срочно принимать меры для достижения объема X, большего $X_{бу}$ путем снижения затрат U и Z, а также дополнительного привлечения кредитов C^b.

При невозможности привлечения кредитов и снижения затрат и возникает вопрос об остановке производства. Однако, к такому решению надо подходить осторожно, так как при остановке производства без уменьшения постоянных затрат величина убытка может не уменьшиться, а, наоборот, увеличиться в виду большой величины постоянных затрат Z, которые не поддаются уменьшению (например, величина арендной платы за землю, за помещения, затраты на хранение и обслуживание оборудования, материальных ресурсов, на склады, отопление, охрану и т.д.) При этом оказывается, что продолжать убыточное производство продукции в ряде случаев будет менее убыточным, чем его останавливать (реализация продукции будет частично компенсировать большие постоянные затраты).

Для получения достаточно обоснованных данных по затратам U и Z необходимо организовать на предприятии раздельный учет постоянных и переменных затрат в бухгалтерии. Такой раздельный учет необходим потому, что переменные и постоянные затраты совершенно по-разному влияют на эффективность и необходимо знать, какой вид нуждается в существенном уменьшении. Кроме того, возможности сокращения постоянных затрат более зависимы от управляющих воздействий самого предприятия, чем возможности сокращения переменных затрат, в большей степени определяемых поставщиками сырья, материалов, комплектующих, энергии и топлива.

В условиях рыночной экономики особенностью функционирования предприятия является большая степень его самофинансирования. Это означает, что объем производственных ресурсов существенно зависит от количества реализованной предприятием продукции, произведенной им в предшествующие периоды времени. Таким образом, более реальным отражением действительности является динамическая модель функционирования предприятия, учитывающая влияние ранее выпущенной и реализованной продукции на производственные ресурсы данного периода.

Для организации финансово-обеспеченного производства необходимо, чтобы выручка, полученная предприятием от реализации (сбыта) произведённой продукции, покрывала (равнялась или превосходила) затраты, понесённые предприятием на изготовление, хранение и сбыт этой продукции.

Предприятия получают основную часть прибыли от реализации продукции. В этом случае валовая прибыль предприятия определяется как разница между выручкой от реализации продукции в действующих ценах без НДС, акцизов, налога с продаж (НСП), экспортных пошлин и др. вычетов, предусмотренных законодательством России и затратами на ее производство и реализацию. Кроме того, предприятия могут реализовывать основные средства, нематериальные активы, ценные бумаги и др. активы. А также получать доходы и нести расходы по внереализационным операциям (которые могут не являться базой для исчисления НДС, НСП и т.д.). В общем виде (при отсутствии в выручке НДС – налога на добавленную стоимость и других налогов, акцизов, пошлин) валовая прибыль предприятия вычисляется по формуле

$$P = B - S.$$

Отношение валовой прибыли к затратам часто называют индексом прибыли (убытка), т.е. величина $\rho = \frac{P}{S} > 0$ называется индексом прибыли, а при $\rho < 0$ — индексом убытка. Если по результатам деятельности предприятия $P > 0$ ($\rho > 0$), то оно работает с прибылью, если $P < 0$ ($\rho < 0$), то с убытками, если $P = 0$ ($\rho = 0$), то производство бесприбыльное. Так как $\rho = \frac{P}{S} = \frac{B - S}{S} = \frac{B}{S} - 1$, то $\frac{B}{S} = 1 + \rho$, $B = (1+\rho)S$. Отсюда $CX = (1+\rho)(UX + Z)$, и цена может быть вычислена по формуле

$$C = \frac{(1+\rho)(UX+Z)}{X} = (1+\rho)(U + Z/X), \qquad (1.1)$$

а объем продукции по формуле

$$X = \frac{Z}{\frac{C}{1+\rho} - U} = \frac{(1+\rho)Z}{C - (1+\rho)U}. \qquad (1.2)$$

Из формулы (1.2) получаем рассмотренную ранее формулу $X_{бу} = \frac{Z}{C - U}$ при $\rho = 0$.

Балансовое уравнение однопродуктового производства

При финансово-обеспеченном производстве должно выполняться следующее соотношение: *Затраты = Поступления*. По отношению к объемам производства затраты делятся на постоянные и переменные, кроме того, к затратам можно отнести налоги и платежи, а также затраты на создание резервных фондов за счет прибыли и прочих поступлений. Основными источниками получения финансовых средств является выручка от произведенной и реализованной продукции, а также собственные (резервные) средства предприятия и заемные средства, например, кредиты банков. Если обе части этого уравнения измерять в денежном выражении, то с учетом его структуры можно сказать, что это уравнение является балансовым (БУ).

Одна из главных целей любого предприятия – получение прибыли. Для этого необходимо, чтобы поступление денежных средств за реализованную продукцию превышало расходование этих средств на производство и сбыт. Однако, расчет точки безубыточности при определении минимально необходимого объема производства можно проводить при условии, что прибыли в текущем периоде предприятием не получено. Для учета обоих факторов (прибыльного и бесприбыльного производства) БУ можно записать в общем виде

$$UX + Z + H + \delta F^p = B + (1-\delta)(C^r + C^b), \tag{1.3}$$

где F^p – накопительный фонд, образующийся за счет получаемой от реализации продукции (товаров, услуг) прибыли, остающейся в распоряжении предприятия (фактически $F^p = P^p$, где P^p – чистая прибыль предприятия); δ – переключатель, принимающий значения 0, если производство бесприбыльное ($\rho \le 0$) или 1, если предприятие получает прибыль ($\rho > 0$); H – общая сумма налогов и платежей (не входящих в затраты на производство и реализацию), которую следует уплатить в рассматриваемом периоде. В случае убыточного производства в эту сумму не входит налог на прибыль в виду отсутствия базы для налогообложения; C^r – объём резервных финансовых средств, привлекаемых в рассматриваемый период для покрытия затрат; C^b – объём заёмных финансовых средств (кредиты банков), используемых предприятием в рассматриваемый период для покрытия затрат.

Если предприятие в рассматриваемый период работало с убытком, т. е. $\rho \le 0$ ($\delta = 0$), то основное балансовое уравнение для этого периода примет вид:

$$UX + Z + H = B + C^r + C^b. \tag{1.4}$$

Если предприятие работает с прибылью ($\rho > 0$, т.е. $\delta = 1$), то полученной выручки достаточно для покрытия всех затрат, всей суммы налогов (включая налог на прибыль) и накопления резервного фонда за счет чистой прибыли, что отражено в формуле

$$UX + Z + H + F^p = B. \tag{1.5}$$

Возможен также вариант, когда $\rho = 0$ (нет ни прибыли, ни убытка), т.е. имеет место частный случай закона самофинансирования, когда неравенство становится равенством. Тогда

$$UX + Z + H = B. \tag{1.6}$$

Вычисление переменных и постоянных затрат

В формуле вычисления затрат используются постоянные и переменные затраты. Приведем их общий вид для статического моделирования.

Переменные затраты на выпуск единицы продукции можно вычислять по следующей формуле:

$$U = C_1^{м} q_1^{м} + \ldots + C_n^{м} q_n^{м} + C_1^{к} q_1^{к} + C_2^{к} q_1^{к} + \ldots + C_m^{к} q_m^{к} + C_1^{э} q_1^{э} + C_2^{э} q_2^{э} + \ldots + C_r^{э} q_r^{э} +$$
$$+ C^{з}\left(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right) - C^{в} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} C_i^{м} q_i^{м} + \sum_{i=1}^{m} C_i^{к} q_i^{к} + \sum_{i=1}^{r} C_i^{э} q_i^{э} + C^{з}\left(1 + \sum_{i=1}^{3} \beta_i\right) -$$
$$- C^{в} + \ldots, \qquad (1.7)$$

где $C_1^{м}, C_2^{м}, \ldots, C_n^{м}$ – стоимость единицы (веса, площади, объёма и т. д.) первого, второго,..., n-го материала (n – количество материалов); $q_1^{м}, q_2^{м}, \ldots, q_n^{м}$ – расходы первого, второго,..., n-ого материала на единицу продукции (на одно изделие); $C_1^{к}, C_2^{к}, \ldots, C_m^{к}$ – стоимость одной штуки 1-го, 2-го,..., m-го комплектующего изделия (m – количество комплектующих изделий); $q_1^{к}, q_2^{к}, \ldots, q_m^{к}$ – расходы 1-го, 2-го,..., m-го комплектующего в штуках на единицу продукции (на одно изделие); $C_1^{э}, C_2^{э}, \ldots C_r^{э}$ – стоимость единицы первого, второго , …, r-го энергоресурса (электроэнергии, топлива, газа и т.д.); $q_1^{э}, q_2^{э}, \ldots q_r^{э}$ – расходы первого, второго,..., r-ого энгергоресурса на единицу продукции (на одно изделие); $C^{З}$ – объём зарплаты производственного персонала, пересчитанного на выпуск одного изделия (на единицу продукции); β_1 – норма платежей в пенсионный фонд (ПФ); β_2 – норма платежей в фонд социального страхования (ФСС); β_3 – норма платежей в фонд медицинского страхования (ФМС); $C^{в}$ – стоимость возвратных средств (реализованных отходов производства, приходящихся на одно изделие).

Пример типовой структуры переменных затрат на основе модели (1.7) в виде ARIS-диаграммы (Модель Технических Терминов) представлена на рисунке 1.1.

Постоянные затраты можно вычислить по формуле:

$$Z = C^{ор} + C^{ам} + C^{мар} + C^{фин} + C^{адм} + C^{ар} + C^{св} + C^{охр} + C^{тр} +$$
$$+ C^{топ} Q^{топ} + C^{эл} Q^{эл} + C^{зоп}\left(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right) + \ldots \qquad (1.8)$$

где $C^{ор}$ – сумма общезаводских расходов на обслуживание и ремонт оборудования, зданий и сооружений (без затрат на зарплату персонала); $C^{ам}$ – амортизация основных средств; $C^{мар}$ – стоимость мероприятий по маркетингу и сбыту продукции; $C^{фин}$ – финансовые издержки, связанные с обслуживанием долга за кредиты, полученные предприятием для обеспечения производства в предшествующие периоды; $C^{адм}$ – административные расходы; $C^{ар}$ – плата за арендуемые помещения и оборудование; $C^{св}$ – оплата телефонного обслуживания, Интернета, факсимильной связи и т.п.; $C^{охр}$ – стоимость охраны;

$C^{тр}$ – стоимость эксплуатации общезаводского транспорта; $Q^{топ}$ – расход топлива на непроизводственные нужды; $C^{топ}$ – стоимость единицы топлива; $Q^{эл}$ – расход электроэнергии на непроизводственные нужды; $C^{эл}$ – стоимость единицы электроэнергии (кВт/ч); $C^{зоп}$ – зарплата обслуживающего персонала, не участвующего в производственных процессах.

***Пример 1.1*.** Предприятие занимается производством деревянных бочек. В результате оценки спроса, цены реализации и затрат на производство и сбыт получены следующие данные: $U = 120$ руб., максимальная цена одной бочки $C_{\max} = 300$ руб., но есть тенденция уменьшения цены в течение года до 200 руб., то есть $C_{\min} = 200$ руб. В состав постоянных затрат входят заработная плата организаторов производства (2000 руб./месяц), расходы на амортизацию оборудования (600 руб./месяц) и два возможных варианта расходов на аренду (1000 руб./месяц и 2400 руб./месяц). По условиям 1-го варианта аренды производственная площадь позволяет организовать выпуск 30 бочек в месяц, а по условиям 2-го варианта – 100 бочек в месяц. Необходимо принять решение по обеспечению безубыточного производства и выбору варианта арендуемого помещения в текущий и последующие периоды.

Решение. Определим постоянные затраты предприятия при 1-м варианте аренды. Имеем $Z = 2000 + 600 + 1000 = 3600$ (руб./месяц).

Выразив из формулы (1.2) при $\rho = 0$ X через C, U и Z, получим $X = \dfrac{Z}{C - U} = Z/(C - U)$. Тогда объем производства на арендуемых площадях по 1-му варианту $X = 3600/(300 - 120) = 20$.

Следовательно, по текущей (максимальной) цене и 1-му варианту аренды можно организовать безубыточное производство, так как мощности позволяют выпускать 30 бочек в месяц, а по расчётам требуется всего 20 бочек.

Если цена упадёт до $C_{\min} = 200$ руб. за бочку, то для обеспечения бесприбыльного производства по 1-му варианту аренды необходимо выпускать в месяц $X = 3600/(200 - 120) = 45$ бочек, что не позволяют арендуемые мощности. Таким образом, в ближайшие периоды предприятие должно перейти на 2-ой вариант аренды, т.е. нести постоянные затраты $Z = 2000 + 600 + 2400 = 5000$ руб. и для обеспечения бесприбыльного производства организовать выпуск $X = 500/(200 - 120) = 62{,}5 \approx 63$ (бочек).

То есть при минимальной цене для обеспечения бесприбыльного производства необходимо выпускать 63 бочки, что позволяют арендуемые площади по 2-му варианту аренды.

Если цена на бочки сохранится на прежнем уровне, то есть составит $C_{\max} = 300$ руб., то по второму варианту аренды для бесприбыльного производства достаточно выпускать $X = 5000/(300 - 120) = 28$ бочек.

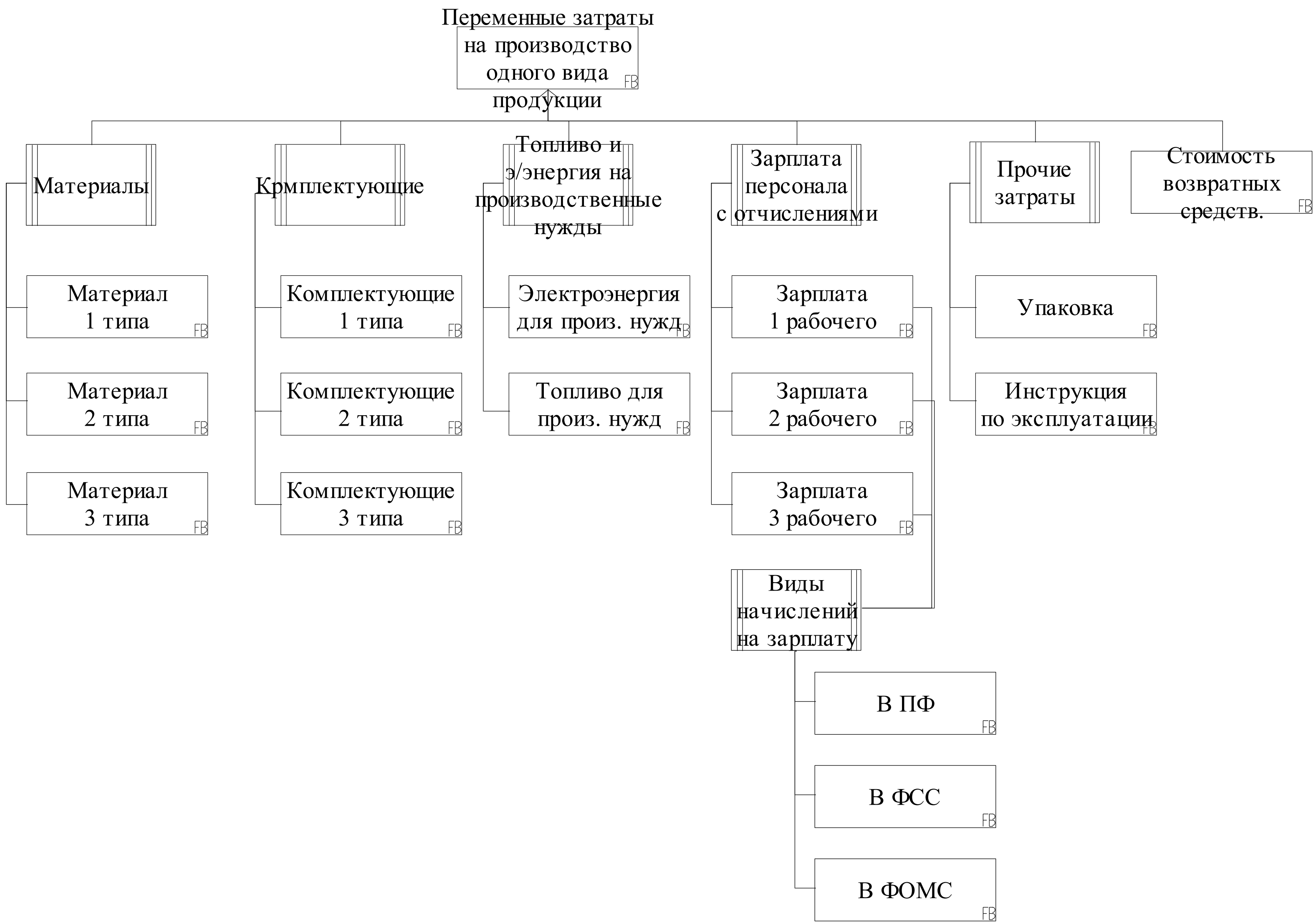

Рис.1.1. Пример типовой структуры переменных затрат

Рис. 1.2 Пример типовой структуры постоянных затрат.

2. Однопродуктовые динамические модели

Модели для принятия решений в современных рыночных условиях России должны быть стоимостными моделями. В них, к тому же, должно учитываться временное запаздывание поступления выручки от реализации продукции. Это означает, что модели должны быть *динамическими*. К динамическим относятся модели, в которых взаимосвязь между экономическими показателями описывается в динамике, т.е. в развитии. При этом отдельные показатели в данный период времени зависят от других показателей в предыдущие моменты времени. Динамические экономические модели позволяют прогнозировать развитие предприятия в функции времени, проводить расчет планов его развития или функционирования.

Модель является динамической, если, как минимум, одна ее переменная, относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные. Математическое описание динамических моделей производиться в виде разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), с помощью дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), а также в виде систем алгебраических уравнений.

Реальный характер экономического функционирования предприятия имеет дискретный вид – разновременно происходят затраты и поступают доходы, скачками, поступают платежи за продукцию, скачками изменяются привлекаемые финансовые средства (кредиты, займы).

Введем в обращение величину *t*, обозначающую временной период (месяц, квартал, год или любой другой отрезок времени), и дополним все ранее введенные обозначения индексом *t*. Введем в обращение еще один временной период τ. В общем случае ($1 \le \tau \le T$), где T – общее время моделирования. Если $\tau \le t$, то в рассматриваемый период продается продукция, уже пролежавшая какое-то время на складе или только произведена в рассматриваемый период. Если $\tau \ge t$, то в рассматриваемый период при реализации учитывается продукция, которая еще не произведена, но уже зарегистрирована в документах как проданная, например, при использовании метода учета выручки и финансовых результатов по оплате, когда на расчетный счет уже поступили денежные средства за еще не отгруженную продукцию. Также C_t^r – собственные (резервные) финансовые средства предприятия, которые используются для производства продукции в период *t*; C_t^b – заемные средства, которые используются для производства продукции в период *t*; B_t – выручка в период *t*; X_t – объем продукции (например, количество в штуках), произведенной предприятием в период *t*; Z_t – постоянные затраты предприятия в период *t*; U_t – переменные затраты, приходящиеся на одно изделие в период *t*; F_t^p – величина накопительного (резервного) фонда, образующегося за счет полученной в период *t* прибыли, остающейся в распоряжении предприятия; δ_t – переключатель, принимающий значение 0 или 1 в зависимости от условий прибыльного или бесприбыльного производства в период t.

В этих обозначениях БУ примет вид

$$U_t X_t + Z_t + H_t + \delta_t F_t^{\,p} = B_t + (1-\delta_t)(C_t^r + C_t^b). \qquad (2.1)$$

Здесь и везде в дальнейшем t последовательно принимает значения 1, 2, 3, …, T, где T – общее время моделирования. Если t=3, то текущим (расчетным) считается 3-й период, и в предшествующие два периода все экономические показатели производственно-сбытовой фирмы (ПСП) уже рассчитаны.

Поскольку предприятие в течение всего времени своей работы получаемую прибыль (резервный фонд) расходует на свои нужды (расширение производства, содержание социальной сферы, материальная помощь сотрудникам, благотворительность и т.п.), то при моделировании финансовой сбалансированности деятельности предприятия следует учитывать изменение собственных (резервных средств). Таким образом, чистая прибыль нарастающим итогом с учетом ее расходования за время T можно вычислять по формуле

$$P_T^p = \sum_{t=1}^{T} \left[\delta_t F_t^{\,p} - (1-\delta_t) C_t^r \right].$$

Рассмотрим два вида налогов, имеющих разную базу начисления: налог на прибыль и налог на добавленную стоимость (НДС), т.е. налог на стоимость добавленную обработкой (переделом) продукции. НДС существенно влияет на финансовое состояние предприятия. Пусть

α — норма налога на прибыль,

β — соответствующая налоговой ставке НДС процентная доля налоговой базы,

S_t^c — затраты на приобретение у поставщиков ТМЦ в период t.

Другие виды отчислений и платежей будем учитывать в S_t. Если предприятие в период t отработало с чистой прибылью P_t, то величина налогов, подлежащая к выплате в период t, вычисляется по формуле:

$$H_t = \alpha P_t + \beta \left(B_t - S_t^c \right). \qquad (2.2)$$

К формуле (2.2) следует дать пояснение. В качестве базы для налогов (в частности, НДС) текущего периода может выступать как выручка текущего периода, так и выручка прошлых периодов. Если для целей налогообложения чаще всего таким периодом принимается месяц, то в данном случае, чтобы не ограничивать область применения формул расчета выручки, достаточно в качестве периода брать отрезок времени, внутри которого, во-первых, цена не меняется (в противном случае период может быть изменен), а, во-вторых, период начисления налога и период его уплаты совпадают. Тогда формулу (4.2) будем считать частным случаем, когда НДС, необходимый к уплате в текущем периоде рассчитывается исходя из выручки этого же периода (такая же ситуация может иметь место в действительности, если НДС уплачивается заранее в виде авансовых платежей с прогнозируемой в этот период суммы выручки).

Аналогичные пояснения можно привести и для величины прибыли P_t, так как прибыль текущего периода зависит от величины поступившей в этот период выручки. Соответственно, налог на прибыль, уплачиваемый в текущий период, в частном случае рассчитывается, исходя из выручки этого периода, то есть B_t. В общем случае, согласно современному российскому налоговому законодательству, периоды уплаты большинства налогов (в том числе, НДС и налога на прибыль) запаздывают от периода получения финансовых результатов от производственно-сбытовой деятельности. То есть на величину H_t влияют параметры, относящиеся к периоду $t-1$ (в частности, X_{t-1}).

В прибыльной деятельности предприятия выручка должна быть больше затрат, т.е. должно выполняться неравенство

$$B_t > S_t + H_t + F_t^p = S_t + \alpha P_t + \beta\left(B_t - S_t^c\right) + F_t^p$$

Валовая прибыль предприятия, фактически получаемая в текущем периоде, равна

$$P_t = B_t\left(1-\beta\right) - S_t. \qquad (2.3)$$

При исчислении налогооблагаемой прибыли валовая прибыль может уменьшаться или увеличиваться на установленные законодательством отчисления, льготы, выплаты и др. суммы. После этого производится удержание налога на прибыль, а остальная сумма прибыли P_t^p (чистая прибыль) остается в распоряжении предприятия и идёт на пополнение его резервных средств, выплату дивидендов и другие платежи из прибыли в период времени *t*. Если $\rho_t = \dfrac{P_t}{S_t}$, где P_t – валовая прибыль предприятия, получаемая в период t от реализации продукции, а S_t – затраты на выпуск этой продукции, тогда

$$P_t = \rho_t\left(U_t X_t + Z_t\right). \qquad (2.4)$$

Формула (2.4) отражает прогнозируемую прибыль без учета реализации продукции прошлых периодов.

Та чистая прибыль, которую планируют использовать на формирование накопительного (резервного) фонда F_t^p, может быть вычислена как

$$F_t^p = P_t^p = \left(1-\alpha\right)P_t = \rho_t\left(1-\alpha\right)\left(U_t X_t + Z_t\right). \qquad (2.5)$$

Тогда формула БУ в общем виде запишется как

$$U_t X_t + Z_t + H_t + \delta_t \rho_t\left(1-\alpha\right)\left(U_t X_t + Z_t\right) = B_t + \left(1-\delta_t\right)\left(C_t^r + C_t^b\right)$$

или

$$\left[1+\delta_t \rho_t\left(1-\alpha\right)\right]\left(U_t X_t + Z_t\right) + H_t = B_t + \left(1-\delta_t\right)\left(C_t^r + C_t^b\right). \qquad (2.6)$$

Величину накопительного фонда можно выразить и через величину получаемой выручки, так как выручка играет ведущую роль в получении прибыли, а, следовательно, и в формировании резервного фонда. Т.е.

$$F_t^p = P_t^p = (1-\alpha)\left[B_t(1-\beta) - U_t X_t - Z_t\right]. \quad (2.7)$$

Если по результатам деятельности в период t $B_t < S_t$, т.е. выручка меньше затрат, то налог на прибыль отсутствует, и БУ в этот период имеет вид $S_t + \beta\left(B_t - S_t^c\right) = B_t + C_t^r + C_t^b$., т.е. в текущий период к уплате в бюджет начислен только НДС. В этом случае размер дополнительно привлекаемых средств (собственных и заемных) можно рассчитать по формуле:

$$C_t^r + C_t^b = S_t - B_t + \beta\left(B_t - S_t^c\right) = S_t - \left(1-\beta\right)B_t - \beta S_t^c. \quad (2.8)$$

Вычисление выручки

Выручку в период t составляют суммы денег от продажи продукции в этот период. В период t могут быть проданы продукты, произведенные как в этот период, так и в предшествующие и даже последующие периоды (см. выше). Цена продукции в общем случае зависит от периода ее изготовления и от текущего (расчетного) периода. Считаем, что в течение расчетного периода (день, месяц и т.д.) цена на продукцию не меняется, ее изменение может происходить только от периода к периоду.

Все рассуждения и расчеты в рамках данной работы, касающиеся вычисления выручки за текущий период, ведутся к концу периода, когда все данные (статистика) рассматриваемого периода уже известны.

В общем виде выручку для предприятия, производящего один вид продукции, можно вычислить по формуле

$$B_t = \sum_{\tau \in N_t} C_{\tau t} X_{\tau t}, , \quad (2.9)$$

где N_t – множество периодов производства продукции, частично или полностью проданной в период t; τ – номер периода, отсчитываемый от начала моделирования (абсолютное время, $1 \le \tau \le t$); $C_{\tau t}$ – цена продукта, изготовленного в период τ, но проданного в период t; $X_{\tau t}$ – объем продукции, выпущенной в период τ, но проданной в период t.

Для случая, если принять условие, что $1 \le \tau < t$, то можно записать частный вариант формулы выручки для однопродуктового динамического производства:

$$B_t = d_t C_t X_t + \sum_{\substack{\tau \in N_t \\ \tau \ne t}} C_{\tau t} X_{\tau t}, , \quad (2.10)$$

где d_t – коэффициент реализации в период t продукции, изготовленной в этот же период ($0 \le d_t \le 1$). Этот коэффициент является показателем работы служб сбыта или маркетинга, т.к. определяет положение дел на предприятии при работе с покупателями по договорам.

Величину $C_{\tau t}$ можно выразить через цену продукции в период t, т.е. записать ее в виде $C_{\tau t} = b_{\tau t} C_t$, где $b_{\tau t}$ – коэффициент влияния на цену временного фактора, а именно, это доля изменения цены за время $t-\tau$ (скидки при $b_{\tau t} < 1$ или наценки при $b_{\tau t} > 1$).

Этот коэффициент может учитывать:

- во-первых, изменение потребительских качеств, в частности, снижение цены по причине физического и/или морального старения изделия, или порчи продуктов питания из-за долгого хранения, или увеличение цены для некоторых видов продукции. Например, для хороших сортов вина $b_{\tau t} \geq 1$ и $b_{\tau t}$ растет с увеличением τ. Для портящихся продуктов $0 \leq b_{\tau t} < 1$;
- во-вторых, инфляционные процессы, в большинстве случаев приводящие к росту цен;
- в-третьих, котировки валют, которые влияют на цену изделия, если она привязана к текущему курсу валют;
- в-четвертых, изменение законодательства в области ценообразования (введение государственно-регулируемых цен на отдельные товары и услуги, новых налогов, пошлин и т.п.);
- в-пятых, сезонные колебания цен, изменение потребительского спроса (например, в канун праздников и сезона отпусков и т.д.).

Если остановиться на первых двух факторах, то:

$$b_{\tau t} = g_{\tau t} + h_{\tau t},$$

где

$g_{\tau t}$ — коэффициент влияния изменения потребительских качеств товара на его цену со временем $t-\tau$;

$h_{\tau t}$ — темп инфляции за период $t-\tau$.

Если известен средний темп инфляции h за какой-либо единичный период (он должен совпадать с длительностью выбранного временного периода), то темп инфляции, повлиявший на цену продукции за время $t-\tau$, можно рассчитать по формуле:

$$h_{\tau t} = (1+h)^{t-\tau} - 1,$$

где h — средний темп инфляции за единичный период.

Величину $X_{\tau t}$ можно записать в виде $X_{\tau t} = d_{\tau t} X_{\tau}$, где $d_{\tau t}$ — коэффициент реализации (продажи) продуктов, изготовленных в период τ, выручка от которых поступает на счет предприятия в период t. С использованием коэффициентов $d_{\tau t}$, $b_{\tau t}$ формулу выручки при условии, что $1 \leq \tau \leq t$ можно записать в виде

$$B_t = C_t \sum_{\tau \in N_t} b_{\tau t} d_{\tau t} X_{\tau}. \qquad (2.11)$$

Величину X_τ можно выразить через достигнутый уровень объемов производства, т.е. представить в виде $X_\tau = r_{\tau t} X_{t-1}$, где $r_{\tau t} = X_\tau / X_{t-1}$ – коэффициент влияния времени ($t-\tau$ периодов) на объемы производства, описывающий динамику производства.

При $1 \le \tau \le t$, то формула вычисления выручки примет вид

$$B_t = C_t \sum_{\tau \in N_t} b_{\tau t} d_{\tau t} r_{\tau t} X_{t-1}. \tag{2.12}$$

Если в выражении (2.11) сумму выручку, полученную от продажи продукции только в рассматриваемый период, вынести из под знака суммы, то исходную формулу можно записать как

$$B_t = d_t C_t X_t + C_t \sum_{\tau \in N_t \setminus t} b_{\tau t} d_{\tau t} r_{\tau t} X_{t-1}.$$

Тогда выражение (2.12) можно представить в виде

$$B_t = C_t \left(d_t X_t + f_t X_{t-1} \right), \tag{2.13}$$

где $f_t = \sum_{\tau \in N_t \setminus t} b_{\tau t} d_{\tau t} r_{\tau t}$.

Пример структуры выручки, вычисляемой по формуле (2.11) можно увидеть на ARIS-диаграмме на рисунке 2.1.

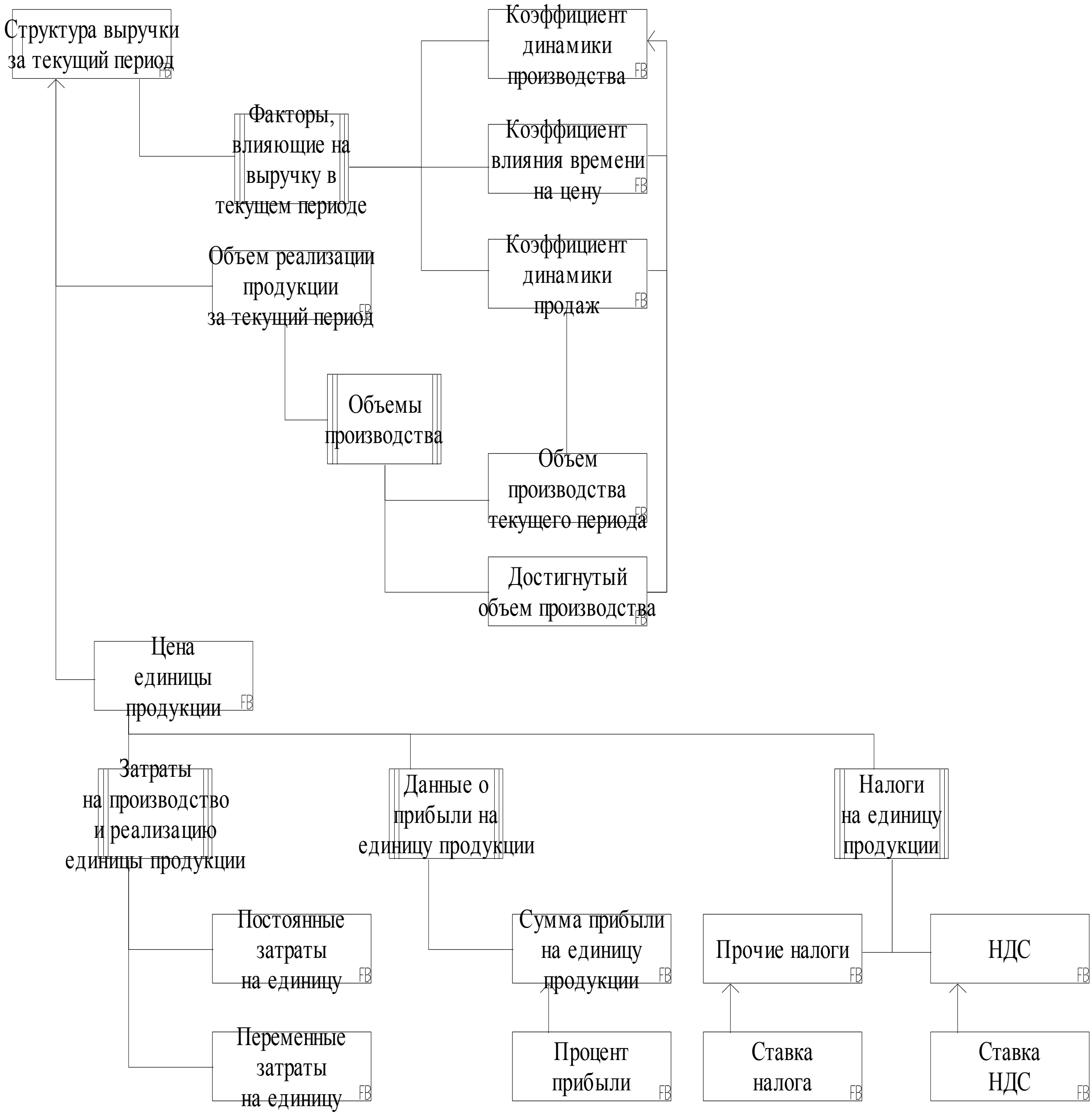

Рис. 2.1. Структура выручки на примере формулы (2.11)

Пример 2.1. Продукция реализуется равномерно за четыре периода, включая текущий. Рыночная цена продукции в рассматриваемый период C_t=100 ден. ед. и за каждый последующий период пребывания на складе цена продукции снижается на 10%. Известно, что с каждым периодом объемы производства возрастали на 5% и в текущий период их ожидаемая величина по прогнозам составит 1000 штук. Определить ожидаемую выручку в текущем периоде.

Решение. Воспользуемся формулой (2.9). Предварительно следует рассчитать рыночные цены той продукции, которая к текущему периоду осталась нереализованной на складе, а также объемы произведенной продукции за периоды, предшествующие текущему.

Рыночная цена рассматриваемого (четвертого) периода равна $C_4 = C_t = 100$ ден. ед. Цена за каждый следующий период нахождения на складе составляет 90% от цены последующего периода, т.е. $C_{34} = 0{,}9C_4 = 90$, $C_{24} = 0{,}9C_{34} = 81$, $C_{14} = 0{,}9C_{24} = 72{,}9$.

Объем произведенной продукции по периодам рассчитаем исходя из известной пятипроцентной динамики роста объемов производства от периода к периоду следующим образом: $X_4 = 1000 = 1{,}05X_3$ шт., тогда $X_3 = X_4/1{,}05 = 953$ шт. Аналогично $X_2 = X_3/1{,}05 = 953$, $X_1 = X_2/1{,}05 = 865$.

Объем реализуемой продукции зависит от коэффициента реализации, который в данном случае для всех периодов, за которые реализуется весь выпуск, равен 25%. Таким образом, $X_{14} = 0{,}25X_1 = 216$ шт., $X_{24} = 0{,}25X_2 = 227$ шт., $X_{34} = 0{,}25X_3 = 238$ шт., $X_{44} = 0{,}25X_4 = 250$ шт.

В итоге, воспользовавшись ранее указанной формулой выручки, получим ее ожидаемое значение в текущем периоде:

$B_4 = 250 \cdot 100 + 72{,}9 \cdot 216 + 81 \cdot 227 + 90 \cdot 238 = 80553{,}4$ ден. ед.

Пример 2.2. Рассчитать объем чистой прибыли, остающейся в распоряжении предприятия, производящего один вид продукции, если известно, что вся продукция реализуется в течение трех периодов. В текущий период продается 80% от всей произведенной в этот период продукции (X_t=1280 изделий) по цене C_t=1450 (с НДС). Эта цена превышает цену единицы изделия за два предшествующих периода, считая в обратном порядке, на 5% и 15% соответственно. В текущем периоде было продано 920 изделий из всей продукции, произведенной в период $\tau = 1$, и 1080 изделий из всей продукции, произведенной в период. Затраты на производство единицы продукции в текущем периоде составляют 850 руб., затраты на закуп ресурсов (без НДС) на производство изделий в текущем периоде составили 650 тыс. руб. Ставка налога на прибыль 24%, НДС – 18%.

Решение. Для определения чистой прибыли следует определить выручку за текущий период и валовую прибыль. Для определения выручки воспользуемся формулой $B_t = C_t\left(d_t X_t + \sum_{\tau\in N_t\backslash t} b_{\tau t} X_{\tau t}\right)$, которая является вариантом формулы (2.11) при условии, что $1 \le \tau < t$. Значения всех используемых в формуле параметров заданы в условиях задачи, а именно C_t=1450, $b_{23} = 0{,}95$, $b_{13} = 0{,}85$, $d_{33} = 0{,}8$, $X_{23} = 1080$ изделий, $X_{13} = 920$ изделий. Тогда

$$B_3 = C_3\left(d_{33}X_3 + \sum_{\tau\in\{1,2\}} b_{\tau 3} X_{\tau 3}\right) = C_3\left(d_{33}X_3 + b_{13}X_{13} + b_{23}X_{23}\right) =$$

$$= 1450\left(0{,}8\cdot 1280 + 0{,}85\cdot 920 + 0{,}95\cdot 1080\right) = 4106400 \text{ руб.}$$

Прибыль предприятия в текущем периоде определим по формуле $P_t = B_t\left(1-\beta\right) - S_t$, для чего установим значения $S_3 = 850\cdot X_3 = 850\cdot 1280 =$ $= 1088000$ руб., процентная доля налоговой базы определяется исходя из значения ставки НДС 18%: $\beta = \frac{18}{118} = 0{,}1525$.

Тогда $P_3 = B_3\left(1-\beta\right) - S_3 = 4106400\ (1-0{,}1525) - 1088000 = 2392174$ руб.

Чистую прибыль можно определить по формуле $P_t^p = P_t\left(1-\alpha\right)$, где $\alpha = 0{,}24$:

$P_3^p = P_3\left(1-\alpha\right) = 2392174\left(1-0{,}24\right) = 1818052{,}24$ руб.

Запишем общую формулу вычисления налогов в текущем периоде

$$H_t = \alpha P_t + \beta\left(B_t - S_t^c\right) = \alpha\left[(1-\beta)B_t - S_t\right] + \beta\left(B_t - S_t^c\right) =$$
$$= (\alpha - \alpha\beta + \beta)B_t - \alpha U_t X_t - \alpha Z_t - \beta S_t^c.$$

Величина резервного фонда была определена формулой (2.5), т.е. как

$$F_t^p = (1-\alpha)P_t = \rho_t(1-\alpha)(U_t X_t + Z_t).$$

С учетом этих равенств БУ для однопродуктового производства в динамике (2.1) можно записать в виде

$$U_t X_t + Z_t + (\alpha - \alpha\beta + \beta)C_t(d_t X_t + f_t X_{t-1}) - \alpha U_t X_t - \alpha Z_t - \beta S_t^c +$$
$$+ \delta_t \rho_t (1-\alpha)(U_t X_t + Z_t) = C_t(d_t X_t + f_t X_{t-1}) + (1-\delta_t)(C_t^r + C_t^b).$$

Перенесем все слагаемые, содержащие X_t, в левую часть.

$$\left[1-\alpha + \delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t X_t + (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t X_t =$$
$$= (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t f_t X_{t-1} + (1-\delta_t)(C_t^r + C_t^b) + \beta S_t^c - \left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]Z_t.$$

Приведем подобные члены

$$\left\{\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t - (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t\right\}X_t =$$
$$= (1-\alpha+\alpha\beta-\beta) f_t C_t X_{t-1} + (1-\delta_t)\left(C_t^r + C_t^b\right) + \beta S_t^c -$$
$$-\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]Z_t. \qquad (2.14)$$

С учетом предложенной формулы вычисления налогов (2.2) формулу (2.1) БУ для однопродуктового производства в динамике после проведенных преобразований можно записать в виде

$$X_t = \frac{(1-\alpha+\alpha\beta-\beta) f_t C_t}{\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t - (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t} X_{t-1} +$$
$$+ \frac{(1-\delta_t)\left(C_t^r + C_t^b\right) + \beta S_t^c - \left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]Z_t}{\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t - (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t},$$

или следующим образом

$$X_t = A_t X_{t-1} + D_t, \qquad (2.15)$$

где

$$A_t = \frac{(1-\alpha+\alpha\beta-\beta) f_t C_t}{\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t - (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t},$$

$$D_t = \frac{(1-\delta_t)\left(C_t^r + C_t^b\right) + \beta S_t^c - \left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]Z_t}{\left[1-\alpha+\delta_t\rho_t(1-\alpha)\right]U_t - (1-\alpha+\alpha\beta-\beta)C_t d_t}, \; t=1, 2, 3,\ldots, T.$$

Вид (2.15) является каноническим и поэтому его можно использовать при решении задач оптимального управления в классической постановке, используя в качестве управляющих параметров величину A_t или D_t.

3. Многопродуктовые статические модели

Статическое балансовое уравнение

Рассмотренные до сих пор расчётные формулы предполагают, что предприятие производит и реализует один вид продукции. Для обобщения полученных формул рассмотрим предприятие, которое выпускает для реализации *n* продуктов (два и более вида) без учета динамики (т.е. вернемся к рассмотрению статических моделей). При этом, выпуская определенный перечень продукции, предприятие может использовать одни виды продукции на производство и/или комплектацию других видов своей продукции. Введем понятие j-й продукт и добавим индекс к ранее введенным обозначениям. Также введем индекс *m* (*m*-ый продукт), для того, чтобы отличить продукцию, которая идет на производство и/или комплектацию других видов продукции (*j*) от продукции (*m*), которая комплектуется или производится с использованием *j*-х видов продукции. В обоих случаях $j = \overline{1,n}$ и $m = \overline{1,n}$, так как это обозначение одного и того же перечня выпускаемых видов продукции предприятия.

Тогда в общем случае БУ финансово-обеспеченного производства j-го продукта будет иметь вид:

$$U_j X_j + \xi_j Z + \sigma_j H + \delta_j F_j^p = B_j + \left(1 - \delta_j\right)\left(\eta_j C^r + \zeta_j C^b\right), \quad (3.1)$$

где ξ_j – удельный вес постоянных расходов предприятия, относимых на j-ю продукцию ($0 \le \xi_j \le 1$), $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j = 1$; σ_j – удельный вес налогов предприятия, относимых на j-ю продукцию ($0 \le \sigma_j \le 1$), $\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j = 1$; η_j – удельный вес резервных средств предприятия, относимых на j-ю продукцию ($0 \le \eta_j \le 1$), $\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j = 1$; ζ_j – удельный вес заёмных средств предприятия, относимых на j-ю продукцию ($0 \le \zeta_j \le 1$).

Величины ξ_j, σ_j, η_j и ζ_j определяются планово-экономическим отделом предприятия, с учётом степени участия общезаводских служб в обслуживании производства j-го продукта. Методика расчёта этих величин разрабатывается на самом предприятии с учётом специфики его производственно-сбытовой деятельности (на основе имеющихся нормативов или статистических данных).

Если ввести обозначения $Z_j = \xi_j Z$, $C_j^r = \eta_j C^r$, $C_j^b = \zeta_j C^b$, $H_j = \sigma_j H$, то уравнение (3.1) примет вид:

$$U_j X_j + Z_j + H_j + \delta_j F_j^p = B_j + (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b), \tag{3.2}$$

где $j = 1, 2, ..., n,\quad (j = \overline{1, n})$.

Расчет цены, чистого и валового выпусков продукции

Система n уравнений позволяет вычислить любые n величин, если известны все остальные величины.

Не весь валовой выпуск j-го продукта может идти на реализацию. Часть этого выпуска может идти на комплектацию других продуктов или использоваться в качестве материалов при их производстве на предприятии. Обозначим через Y_j – чистый выпуск j-го продукта, то есть объём j-го продукта, идущий на реализацию. Если в расчётный период вся чистая продукция реализуется по цене C_j, то выручка вычисляется по формуле $B_j = C_j Y_j$. Объем продукции, вычисляемый по формуле $X_j - Y_j$, называется внутренним выпуском j-го продукта, то есть это объём j-й продукции, идущей на выпуск (комплектацию или производство) других видов продукции. Эту величину можно вычислить по формуле $X_j - Y_j = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m$, где a_{jm} – количество единиц j-го продукта, необходимое для комплектации или производства одной единицы m-го продукта (как правило, a_{jj}=0). Очевидно, что $\sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m$ – объём (количество единиц) j-го продукта, необходимый для выпуска других продуктов предприятия.

Из последнего выражения имеем

$$Y_j = X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m . \tag{3.3}$$

Тогда формула выручки имеет вид

$$B_j = C_j Y_j = C_j \left(X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m \right), \tag{3.4}$$

а формула (3.2) преобразуется в выражение

$$U_j X_j + Z_j + H_j + \delta_j F_j^p = C_j \left(X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m \right) + (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b). \tag{3.5}$$

Для вычисления цены j-й продукции имеем

$$C_j = \frac{U_j X_j + Z_j + H_j + \delta_j F_j^p - (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b)}{X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m}. \qquad (3.6)$$

Выразим из системы БУ (3.5) формулу для вычисления объёмов валового производства.

$$(U_j - C_j)X_j + C_j \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m = (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b) - Z_j - H_j - \delta_j F_j^p. \qquad (3.7)$$

Введем обозначения

$$w_j = (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b) - Z_j - H_j - \delta_j F_j^p \qquad (3.8)$$

и

$$v_{jm} = \begin{cases} U_j + (a_{jj} - 1)C_j & \text{при} \quad m = j \\ C_j a_{jm} & \text{при} \quad m \neq j \end{cases}$$

Тогда выражение (3.7) примет вид:

$$\sum_{m=1}^{n} v_{jm} X_m = w_j.$$

Ведём в обращение матрицу V, векторы-столбцы $\overline{X}$ и $\overline{W}$:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \overline{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Тогда последняя система линейных алгебраических уравнений примет следующий матричный вид $V\overline{X} = \overline{w}$. Отсюда имеем $\overline{X} = V^{-1}\overline{w}$.

Пример 3.1. Малое швейное предприятие выпускает для реализации через собственную торговую точку и оптом через склад следующую продукцию:

1. наволочка;
2. простыня;
3. пододеяльник;
4. двуспальная простыня;
5. двуспальный пододеяльник,

из которой формируются комплекты постельного белья:

6. спальный комплект;
7. двуспальный комплект.

Таким образом, ПСП производит n=7 продуктов. Причем в спальный комплект входят две наволочки (a_{16}=2), одна простыня (a_{26}=1) и один пододеяльник (a_{36}=1). В двуспальный комплект входят четыре наволочки (a_{17}=4), двуспальная простыня (a_{47}=1), два пододеяльника (a_{37}=2) и один двуспальный пододеяльник (a_{57}=1).

Постоянные затраты на всю продукцию составляют величину 815 тыс. руб. Резервные и заемные средства предприятия привлекаются в объеме 25 тыс. руб. и 15 тыс. рублей соответственно. Сумма уплачиваемых налогов составляет 35 тыс. руб. Удельные веса постоянных расходов предприятия, налогов, его резервных средств и заемных средств, относимых на j-ю продукцию, а также рыночная цена каждого вида продукции и переменные затраты на единицу продукции представлены в таблице (3.1):

Таблица 3.1Исходные данные

j	Вид продукции	U_j, *руб.*	ξ_j	σ_j	η_j	ζ_j	C_j, *руб.*
1	наволочка	30,00	0,01	0,1	0,15	0,23	300,00
2	простыня	35,00	0,05	0,15	0,18	0,2	350,00
3	пододеяльник	55,00	0,03	0,15	0,22	0,2	550,00
4	двуспальная простыня	60,00	0,06	0,18	0,25	0,12	600,00
5	двуспальный пододеяльник	120,00	0,08	0,16	0,1	0,17	1200,00
6	спальный комплект	15,00	0,22	0,16	0,05	0,06	1550,00
7	двуспальный комплект	25,00	0,55	0,1	0,05	0,02	4500,00

Определить объемы валового выпуска каждого вида продукции и чистый выпуск j-го продукта при заданных условиях. Рассчитать выручку по каждому виду продукции и по всему предприятию в целом.

Решение. Чистый выпуск j-го продукта определяется по формуле $Y_j = X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m$.

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - 2X_6 - 4X_7 \\ Y_2 = X_2 - X_6 \\ Y_3 = X_3 - X_6 - 2X_7 \\ Y_4 = X_4 - X_7 \\ Y_5 = X_5 - X_7 \\ Y_6 = X_6 \\ Y_7 = X_7 \end{cases}$$

Решение задачи проведено с помощью табличного редактора EXCEL.

Алгоритм решения:

1. Рассчитать матрицу-столбец $\overline{W}$ исходя из формулы (3.8).

$$\overline{W}=\begin{pmatrix}-4450\\-38500\\-21200\\-47150\\-65750\\-182750\\-450200\end{pmatrix}$$

2. Определить матрицу коэффициентов A, где a_{jm} — количество единиц j-го продукта, идущее на производство (комплектацию) m-го продукта.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&2&4\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3. Определить матрицу V, где элементы главной диагонали вычисляются по формуле U_j-C_j, а элементы выше и ниже главной диагонали – по формуле $C_j a_{jm}$.

$$V=\begin{pmatrix}-270&0&0&0&0&600&1200\\0&-315&0&0&0&350&0\\0&0&-495&0&0&550&1100\\0&0&0&-540&0&0&600\\0&0&0&0&-1080&0&1200\\0&0&0&0&0&-1535&0\\0&0&0&0&0&0&-4475\end{pmatrix}$$

4. Записать матрицу V^{-1}, обратную матрице V, используя функцию МОБР табличного редактора EXCEL.

$$V^{-1}=\begin{pmatrix} -0{,}0037 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0014 & -0{,}0010 \\ 0 & -0{,}0032 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0007 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0020 & 0 & 0 & -0{,}0007 & -0{,}0005 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}0019 & 0 & 0 & -0{,}0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0009 & 0 & -0{,}0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0007 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0002 \end{pmatrix}$$

5. Умножением матрицы V^{-1} и вектора-столбца $\overline{W}$ определим вектор-столбец $\overline{X}$, используя функцию МУМНОЖ табличного редактора EXCEL..

$$\overline{X}=\begin{pmatrix} 728 \\ 255 \\ 399 \\ 199 \\ 173 \\ 119 \\ 101 \end{pmatrix}$$

6. Определим выручку по каждому виду продукции, используя формулу (3.4). Итоговый результат представлен в таблице 3.2

Таблица 3.2

Итоговые значения

Вид продукции	Валовой выпуск, X ед.	Чистый выпуск, Y ед.	Выручка, руб.
1	728	88	26295,25
2	255	135	47407,71
3	399	78	43127,13
4	199	98	59095,78
5	173	72	86469,34
6	119	119	184535,83
7	101	100	452715,08
Итого			899646,11

4. Многопродуктовые динамические модели

Вычисление переменных затрат

Если предприятие производит более одного вида продукции, то считаем, что оно многопродуктовое. Также, если при построении математической модели предприятия рассматривается его деятельность более чем за один период (два и более), то говорят и динамической модели. Для ее построения введем некоторые обозначения:

n – количество продуктов, выпускаемых предприятием;

X_{jt} – валовой выпуск j-го продукта (j=1,2,…,n) в период t;

U_{jt} – переменные затраты на выпуск единицы j-го продукта в период t;

Z_{jt} – часть постоянных затрат предприятия в период t, отнесенных к j-му продукту;

C^r_{jt} – сумма резервных средств, снятая со счёта предприятия для покрытия расходов на производство и реализацию j-го продукта в период t;

C^b_{jt} – сумма заёмных средств (кредитов), потраченная предприятием в период t для покрытия расходов на производство и реализацию j-го продукта в этот период.

C_{jt} – цена единицы j-го продукта в период t;

B_{jt} – выручка предприятия от реализации j–й продукции в период t;

S_{jt} – затраты предприятия на изготовление j-й продукции в период t;

Y_{jt} – объем чистого выпуска j-го продукта в период t;

d_{jt} – доля реализации j-го продукта в период t, выпущенного для сбыта в этот же период ($0 \le d_{jt} \le 1$);

$C_{j\tau t}$ – цена единицы j-го продукта, выпущенного в период τ, но проданного в период t ($1 \le \tau \le t$);

$Y_{j\tau t}$ – объём чистого выпуска j-го продукта, выпущенного в период τ, но проданного в период t;

N_{jt} – множество периодов производства j-го продукта, частично (или полностью) реализованного в период t.

Если по результатам деятельности в период t выручка от реализации j-го продукта меньше затрат на его производство и реализацию, то БУ для этого продукта в этот период имеет вид $S_{jt} + H_{jt} = B_{jt} + C^r_{jt} + C^b_{jt}$.

Затраты предприятия в период t, отнесенные к j-й продукции вычисляются по формуле $S_{jt} = U_{jt} X_{jt} + Z_{jt}$.

Общие затраты предприятия в период t вычисляются по формуле $S_t = \sum_{j=1}^{n} U_{jt} X_{jt} + Z_t$, где $Z_t = \sum_{j=1}^{n} Z_{jt}$ – постоянные затраты предприятия в период t.

В многопродуктовых динамических моделях формула вычисления переменных затрат принимает следующий более общий вид:

$$U_{jt} = \sum_{m \in N_j^k} C_{jmt}^{к} q_{jm}^{к} + \sum_{m \in N_j^{м}} C_{jmt}^{м} q_{jm}^{м} + \sum_{m \in N_j^{э}} C_{jmt}^{э} q_{jm}^{э} + C_{jt}^{з}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} \beta_k\right) - C_{jt}^{в},$$

где N_j^k – перечень типов комплектующих изделий, используемых для производства единицы j-й продукции; $C_{jmt}^{к}$ – стоимость в период t одного комплектующего изделия m-го типа, используемого для производства j-го продукта; $q_{jm}^{к}$ – количество комплектующих изделий m-го типа в единице j-й продукции; $N_j^{м}$ – перечень типов материалов, используемых для производства единицы j–го продукта; $C_{jmt}^{м}$ – стоимость в период t единицы (веса, площади, объема) m-го материала, используемого для производства единицы j–го продукта; $q_{jm}^{м}$ – расход m-го материала на производство единицы j-го изделия; $N_j^{э}$ – перечень типов энергоресурсов (электроэнергии, топлива и т.д.), используемых для производства единицы j–го продукта; $C_{jmt}^{э}$ – стоимость в период t единицы m-го типа энергоресурса, расходуемого на производство единицы j-го продукта; $q_{jm}^{э}$ – расход m-го типа энергоресурса на изготовление единицы j-го продукта; $C_{jt}^{з}$ – фонд зарплаты производственного персонала, в расчете на выпуск единицы j-го продукта в период t; β_1 – индекс платежей в Пенсионный фонд; β_2 – индекс платежей в Фонд социального страхования; β_3 – индекс платежей в Фонд медицинского страхования; $C_{jt}^{в}$ – стоимость возвратных средств в период t на единицу j-го продукта от реализованных отходов.

Более общей формулой вычисления переменных затрат можно считать выражение

$$U_{jt} = \sum_{m=1}^{N_j} C_{jmt} q_{jm} + C_{jt}^{з}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} \beta_k\right) - C_{jt}^{в}, \tag{4.1}$$

где N_j — количество всех входов (ресурсов) предприятия (комплектующих изделий, материалов, энергоресурсов и других входов), используемых для производства единицы j-й продукции; C_{jmt} — стоимость одной единицы входа m-го типа, используемого для производства j-го продукта; q_{jm} — количество единиц входа m-го типа в единице j-й продукции.

Формулу вычисления выручки ПСП от реализации *j*–й продукции в период *t* при условии рассмотрения деятельности ПСП в динамике можно представить в следующем максимально общем виде

$$B_{jt} = \sum_{\tau \in N_{jt}} C_{j\tau t} Y_{j\tau t}, \tag{4.2}$$

где t – рассматриваемый (расчетный) период, $1 \leq t \leq T$, T – общее время моделирования, $C_{j\tau t}$ – цена единицы *j*-го продукта, выпущенного в период τ, но проданного в период *t*, $Y_{j\tau t}$ – объём *j*-го продукта, выпущенного для реализации в период τ, но проданного в период *t*; N_{jt} – множество периодов производства *j*-й продукции, частично или полностью проданной в период *t;* τ – номер периода, отсчитываемый от начала моделирования. В общем случае ($1 \leq \tau \leq T$). Если $\tau \leq t$, то в рассматриваемый период продается продукция, уже пролежавшая какое-то время на складе или только произведена в рассматриваемый период. Если $\tau \geq t$, то в рассматриваемый период при реализации учитывается продукция, которая еще не произведена, но уже зарегистрирована в документах как проданная, например, при использовании метода учета выручки и финансовых результатов по оплате, когда на расчетный счет уже поступили денежные средства за еще не отгруженную продукцию.

Выручка от реализации всех видов продукции ПСП в период *t* $B_t = \sum_{j=1}^{n} B_{jt}$,

Величину $C_{j\tau t}$ можно представить в виде $C_{j\tau t} = b_{j\tau t} C_{jt}$, где C_{jt} – цена *j*-го продукта в период t; $b_{j\tau t}$ – доля цены *j*-го продукта, изготовленного в период τ, по отношению к цене этого продукта в период *t*, т.е. к цене $C_{j\tau t}$. Очевидно, что $b_{jtt} = 1$. Величиной $b_{j\tau t}$ можно описать (охарактеризовать) ценовую политику фирмы, когда при определении цены продукции, выпускаемой предприятием, следует учитывать и уровень потребительского спроса на эту продукцию, эластичность спроса, сложившегося на рынке этой продукции, возможность реакции рынка на изменение выпуска предприятием этой продукции; меры государственного регулирования ценообразования; уровень цен на аналогичную продукцию предприятий-конкурентов и т.д.

С учетом коэффициента $b_{j\tau t}$ формула вычисления выручки примет вид

$$B_{jt} = C_{jt} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} Y_{j\tau t}\,. \tag{4.3}$$

Величину $Y_{j\tau t}$ можно представить в виде $Y_{j\tau t} = d_{j\tau t} Y_{j\tau}$, где $Y_{j\tau}$ — объем чистого выпуска j-й продукции в период τ, $d_{j\tau t}$ — доля чистого выпуска *j*-й продукции, произведенной в период τ, но проданной в период t. Очевидно, что $\sum_{\tau=1}^{t} d_{j\tau t}=1$. Величина $d_{j\tau t}$ описывает динамику продаж. Если, например, $N_{jt}=\{t,t-1,t-2,t-3\}$, $d_{jtt}=0{,}5$, $d_{j,t-1,t}=0{,}3$, $d_{j,t-2,t}=0{,}1$, $d_{j,t-3,t}=0{,}1$, то j-я продукция, произведенная в любой период, полностью реализуется за четыре периода, причем, в период ее изготовления реализуется 50% объема чистого производства (выпуска), а в следующие три периода соответственно 30%, 10% и 10%. Тогда

$$B_{jt}=C_{jt}\sum_{\tau\in N_{jt}} b_{j\tau t}d_{j\tau t}Y_{j\tau}. \tag{4.4}$$

Формулу выручки необходимо выразить через объемы валового выпуска. Внутренний выпуск j-го продукта в период τ, т.е. часть j-го продукта изготовленного в период τ для комплектации других продуктов, вычисляется по формуле $X_{j\tau}-Y_{j\tau}=\sum_{m=1}^{n} a_{jm}X_{m\tau}$, где $X_{j\tau}$ – объем валового выпуска j-го продукта в период τ, a_{jm} – количество единиц j-го продукта, необходимое для комплектации одной единицы m-го продукта. Отсюда в период τ имеем $Y_{j\tau}=X_{j\tau}-\sum_{m=1}^{n} a_{jm}X_{m\tau}=\sum_{m=1}^{n} q_{jm}X_{m\tau}$, где $q_{jm}=1-a_{jj}$ при $m=j$ и $q_{jm}=-a_{jm}$ при $m\neq j$. Тогда получим

$$B_{jt}=C_{jt}\sum_{\tau\in N_{jt}} b_{j\tau t}d_{j\tau t}\sum_{m=1}^{n} q_{jm}X_{m\tau}. \tag{4.5}$$

Величину $X_{m\tau}$ можно выразить через достигнутый уровень валового производства, т.е. представить в виде $X_{m\tau}=r_{m\tau t}X_{m,t-1}$, где $X_{m,t-1}$ – достигнутый объем валового производства, $r_{m\tau t}$ – коэффициент динамики валового выпуска m-го продукта за период $t-\tau+1$, т.е. объем производства m-го продукта в период τ по с равнению с достигнутым уровнем производства. Величиной $r_{m\tau t}$ можно описывать спады или подъёмы производства m-го продукта за время $t-\tau+1$.

$$B_{jt}=C_{jt}\sum_{\tau\in N_{jt}} b_{j\tau t}d_{j\tau t}\sum_{m=1}^{n} q_{jm}r_{m\tau t}X_{m,t-1}. \tag{4.6}$$

Если воспользоваться обозначением

$$f_{jmt}=q_{jm}\sum_{\tau\in N_{jt}} b_{j\tau t}d_{j\tau t}r_{m\tau t}, \tag{4.7}$$

то

$$B_{jt} = C_{jt} \sum_{m=1}^{n} f_{jmt} X_{m,t-1}. \qquad (4.8)$$

Произведение коэффициентов $b_{j\tau t} d_{j\tau t} r_{m\tau t}$ в выражении (4.7) характеризует совместное влияние динамики производства до текущего периода, работу служб сбыта и ценовой политики ПСП на процесс реализации продукции и, следовательно, на результат этого процесса – величину выручки.

<u>Пример 4.1.</u> Рассмотрим использование общей формулы вычисления выручки (*формула 4.2*). Пусть ПСП производит и реализует со склада три вида продукции: воду питьевую в литровых бутылках ($j = 1$); квас в бутылках по 1,25 литра ($j = 2$) и воду газированную в ассортименте в 1,5 литровых бутылках. Вода питьевая является исходным сырьем для производства остальных видов продукции рассматриваемого ПСП. Вычислим выручку от реализации к концу второго квартала, т.е. в текущий период $t = 6$ (t — месяц) второго вида продукта (кваса в бутылках по 1,25 литра). Пусть $N_{26} = \{2, 3, 5, 6\}$, то есть в текущий период реализуется квас, изготовленный в периоды 2, 3, 5, 6. Необходимые для расчетов данные приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Исходные значения цены и чистого выпуска

τ	1	2	3	4	5	6
$C_{2\tau 6}$	10,5	10,8	11,4	11	12	12
$Y_{2\tau 6}$	-	32	155	-	1150	7000

<u>*Решение.*</u> В рассматриваемый период $t = 6$ реализуется по цене 12 руб. 7000 бут. продукции 2-го вида (кваса в бутылках по 1,25 литра), произведенной в этот же период, а также продукция, произведенная во 2-й, 3-й и 5-й месяцы соответственно в объемах 32, 155 и 1150 бут. по ценам 10,8 руб., 11,48 руб. и 12 руб.

Выручка согласно формуле (4.2) равна:

$$B_{26} = \sum_{\tau \in \{2,3,5,6\}} C_{2\tau 6} Y_{2\tau 6} = C_{226} Y_{226} + C_{236} Y_{236} + C_{256} Y_{256} + C_{266} Y_{266} +$$

$$= 10{,}8 \cdot 32 + 11{,}4 \cdot 155 + 12 \cdot 1150 + 12 \cdot 7000 = 99912{,}6 \text{ руб.}$$

<u>Пример 4.2.</u> Рассмотрим использование общей формулы выручки с учетом ценовой политики ПСП (*формула 4.3*). Изменим теперь условия примера и введем коэффициент влияния времени на цену продукции. Известно, что некоторые минеральные воды имеют ограниченный срок годности[1], не приводящий к потере потребительских свойств. Пусть это будет 6 месяцев. Следовательно, вся продукция, произведенная за 6 месяцев до текущего (включая последний), может

[1] Срок годности – период, в течение которого предмет, вещь сохраняет свои свойства в мере, обеспечивающее их функционирование, использование. За пределами срока годности продукты питания считаются непригодными в пищу, лекарства запрещены к употреблению, а потребительские товары расцениваются как продаваемые “без претензий”. Для отдельных товаров термин эквивалентен гарантийному сроку [9].

продаваться в рассматриваемый период по рыночной цене текущего периода, если иное не предусмотрено договорами на реализацию. В нашем случае продукция, чей срок годности истекает (например, через два месяца), может продаваться, но уже будучи уцененной, например, на 10% по отношению к цене текущего периода. Для продукции, произведенной, например, в 3-й и 4-й месяцы, покупатель может также претендовать на скидку, допустим, 5%.

Решение. Воспользуемся необходимыми данными из примера 4.1. Кроме того, пусть мы имеем следующие коэффициенты влияния времени, используемые в формуле (4.3): $b_{226} = 0,9$, $b_{236} = b_{246} = 0,95$. Остальные цены равны рыночной, т.е. $b_{256} = b_{266} = 1$. Тогда выручка рассчитывается следующим образом:

$$B_{26} = C_{26} \sum_{\tau \in \{2,3,5,6\}} b_{2\tau 6} Y_{2\tau 6} = C_{26}(b_{226}Y_{226} + b_{236}Y_{236} + b_{256}Y_{256} + b_{266}Y_{266}) =$$

$$= 12 \cdot (0,9 \cdot 32 + 0,95 \cdot 155 + 1 \cdot 1150 + 1 \cdot 7000) = 99912,6 \text{ руб.}$$

Пример 4.3. Рассчитаем выручку с учетом динамики продаж (*формула 4.4*). В портфеле заказов (договоров с покупателями) указаны объемы, сроки поставки, цены за поставленную продукцию и т.д. После соответствующих расчетов, определяющих валовой выпуск продукции и объемы промежуточного и конечного продуктов, получены следующие объемы чистого выпуска $Y_{2\tau}$ 2-го вида продукции в каждом периоде от первого до текущего, которые вместе со значениями коэффициентов $b_{2\tau 6}$ и $d_{2\tau 6}$ представлены в таблице 4.2

Таблица 4.2. Исходные значения чистого выпуска, коэффициента динамики продаж и коэффициента влияния времени на цену продукции

τ	1	2	3	4	5	6
$Y_{2\tau}$	-	800	2583	-	5750	10000
$d_{2\tau 6}$	-	0,04	0,06	-	0,2	0,7
$b_{2\tau 6}$	0,9	0,9	0,95	0,95	1	1

Решение. Выручка с учетом динамики продаж, рассчитанная по формуле (4.4), равна

$$B_{26} = C_{26} \sum_{\tau \in \{2,3,5,6\}} b_{2\tau 6} d_{2\tau 6} Y_{2\tau} = C_{26}(b_{226}d_{226}Y_{22} + b_{236}d_{236}Y_{23} +$$

$$+ b_{256}d_{256}Y_{25} + b_{266}d_{266}Y_{26}) = 12 \cdot (0,9 \cdot 0,04 \cdot 800 + 0,95 \cdot 0,06 \cdot 2583 +$$

$$+ 1 \cdot 0,2 \cdot 5750 + 1 \cdot 0,7 \cdot 10000) = 99912,37 \text{ руб.}$$

Пример 4.4. Используем для расчетов формулу вычисления выручки через объемы валового производства (*формула 4.5*). Поэтому рассмотрим предшествующий пример относительно первого вида продукции, так как только он используется для производства других видов продукции. Для вычисления выручки первого вида продукции (питьевой воды) потребуются продажная цена текущего периода для питьевой воды (1 л.) $C_{16} = 5$ руб., значения коэффициентов $d_{j\tau t}$, $b_{j\tau t}$, a_{jm}, а также объемы валового выпуска X_{mt}. Необходимые данные приведены в таблицах 4.3, 4.4. и 4.5.

Таблица 4.3.Исходные значения коэффициентов динамики продаж продукции

j	d_{j16}	d_{j26}	d_{j36}	d_{j46}	d_{j56}	d_{j66}
1	0,01	0,01	0,03	0,05	0,1	0,8
2	-	0,04	0,06	-	0,2	0,7
3	-	0,1	0,1	-	0,3	0,5

Таблица 4.4 Исходные значения коэффициентов влияния времени на цену

j	b_{j16}	b_{j26}	b_{j36}	b_{j46}	b_{j56}	b_{j66}
1	0,9	0,9	0,95	0,95	1	1
2	0,9	0,9	0,95	0,95	1	1
3	0,9	0,9	0,95	0,95	1	1

Таблица 4.5 Исходные значения валовых объемов производства продукции

j	X_{j1}	X_{j2}	X_{j3}	X_{j4}	X_{j5}	X_{j6}
1	30000	38600	46548	41000	52137	61860
2	-	800	2583	-	5750	10000
3	-	10000	13880	-	14100	14200

Решение. Из всех видов производимой продукции только питьевая вода продается в течение шести периодов с момента производства. Квас и газвода не реализуются в первый и четвертый периоды, считая от начала моделирования (в нашем случае с начала года). Известно также, что питьевая вода идет на производство кваса и газированной воды. Таким образом, коэффициенты a_{jm}, отличные от нуля, в нашем примере будут иметь следующие значения: $a_{12} = 1{,}25$, $a_{13} = 1{,}5$. Причем, эти коэффициенты не зависят от времени, то есть от периода производства и реализации.

Запишем формулу для вычисления выручки от реализации первого вида продукции (питьевой воды 1 л.) в текущий период с учетом объемов валового производства. Из коэффициентов q_{jm} $q_{12} = -1{,}25$, $q_{13} = -1{,}5$, $q_{11} = q_{22} = q_{33} = 1$. Также $X_{m1} = X_{m4} = 0$ для $m \in \{2,\ 3\}$ в периоды $\tau = 1$ и $\tau = 4$, когда все виды продукции, кроме первого, не выпускались. Таким образом, в формуле (4.5) произведения $q_{jm}X_{mt}$ и $q_{jm}X_{m\tau}$, где используются указанные выше нулевые значения, также равны нулю, и расчетная формула имеет следующий вид:

$$B_{16} = C_{16} \sum_{\tau \in \{1,2,3,4,5,6\}} b_{1\tau 6} d_{1\tau 6} \sum_{m=1}^{3} q_{1m} X_{m\tau} = C_{16}[b_{116} d_{116} q_{11} X_{11} +$$

$$+ b_{126} d_{126} (q_{11} X_{12} + q_{12} X_{22} + q_{13} X_{32}) + b_{136} d_{136} (q_{11} X_{13} +$$

$$+ q_{12} X_{23} + q_{13} X_{33}) + b_{146} d_{146} q_{11} X_{14} + b_{156} d_{156} (q_{11} X_{15} +$$

$$+ q_{12} X_{25} + q_{13} X_{35}) + b_{166} d_{166} (q_{11} X_{16} + q_{12} X_{26} + q_{13} X_{36})] =$$

$$=5 \cdot [0,9 \cdot 0,01 \cdot 30000 + 0,9 \cdot 0,01 \cdot (1 \cdot 38600 - 1,25 \cdot 800 - 1,5 \cdot 10000) +$$

$$+ 0,95 \cdot 0,03(1 \cdot 46548 - 1,25 \cdot 2583 - 1,5 \cdot 13880) + 0,95 \cdot 0,05 \cdot 41000 +$$

$$+ 1 \cdot 0,1 \cdot (1 \cdot 52137 - 1,25 \cdot 5750 - 1,5 \cdot 14100) + 1 \cdot 0,8 \cdot (1 \cdot 61860 - 1,25 \cdot 10000 -$$

$$- 1,5 \cdot 14200)] = 139450,4 \text{ руб.}$$

Пример 4.5. Рассчитаем выручку с учетом динамики валового выпуска (*формула 4.6*). Используем некоторые из заданных условий предыдущих примеров. Пусть для первого вида продукции (питьевой воды 1 л.) известны цена $C_{16} = 5$ в текущий период $\tau = 6$, коэффициент реализации $d_{166} = 0,8$, валовые объемы всех видов выпущенной продукции с начала года и до периода, предшествующего текущему, т.е. за пять месяцев. Валовой объем производства в последний (пятый) период считается достигнутым уровнем (таблица 4.6).

Таблица 4.6.

Исходные значения валовых объемов производства всех видов продукции

m	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	X_{m4}	X_{m5}	X_{m6}
1	30000	38600	46548	41000	52137	61860
2	-	800	2583	-	5750	10000
3	-	10000	13880	-	14100	14200

Кроме того, известны коэффициенты $d_{1\tau 6}$ и $b_{1\tau 6}$ (таблица 4.3 и таблица 4.4), и заданы коэффициенты $r_{m\tau t}$ (таблица 4.7).

Таблица 4.7

Исходные значения коэффициентов динамики производства всех видов продукции

m	r_{m16}	r_{m26}	r_{m36}	r_{m46}	r_{m56}	r_{m66}
1	0,5754	0,7404	0,8928	0,7864	1	1,1865
2	-	0,1391	0,4492	-	1	1,7391
3	-	0,7092	0,9844	-	1	1,0071

Требуется рассчитать выручку в рассматриваемый период для питьевой воды (1 л.), который продается как самостоятельный продукт участвует в производстве других видов продукции (кваса и газводы). Таким образом, дополнительно для вычисления выручки воспользуемся рассчитанными в примере 4.4 коэффициентами $q_{11}=1$, $q_{12}=-1{,}25$, $q_{13}=-1{,}5$.

Решение. Чтобы использовать формулу для расчета выручки, предварительно рассчитаем сложный показатель f_{jmt}, расписанный в формуле (4.7), также для $m=1,\ 2,\ 3$. В качестве примера рассчитаем показатель f_{116}. Расчеты для f_{126} и f_{136} аналогичны. Кроме того, для расчетов всех показателей используются одни и те же значения коэффициентов $b_{1\tau 6}$ и $d_{1\tau 6}$ (с учетом того, в какие периоды производится и реализуется продукция). Продукция первого вида производится и реализуется во все периоды с начала года до $\tau=6$, т.е. все коэффициенты $b_{1\tau 6}$ и $d_{1\tau 6}$ не равны 0. Значения же q_{1m} и $r_{m\tau 6}$ меняются в зависимости от m. Для $m=1$

$$f_{116}=q_{11}\sum_{\tau\in\{1,2,3,4,5,6\}} b_{1\tau 6}d_{1\tau 6}r_{1\tau 6}=q_{11}(b_{116}d_{116}r_{116}+b_{126}d_{126}r_{126}+b_{136}d_{136}r_{136}+$$

$$+b_{146}d_{146}r_{146}+b_{156}d_{156}r_{156}+b_{166}d_{166}r_{166})=1\cdot(0{,}01\cdot 0{,}9\cdot 0{,}5754+$$

$$+0{,}9\cdot 0{,}01\cdot 0{,}7404+0{,}95\cdot 0{,}03\cdot 0{,}8928+0{,}95\cdot 0{,}05\cdot 0{,}7864+1\cdot 0{,}1\cdot 1+$$

$$+1\cdot 0{,}8\cdot 1{,}1865)=1{,}123841$$

Для $m=2$ $f_{126}=-1{,}8957515$; для $m=3$ $f_{136}=-1{,}4963451$.

Для расчета выручки, получаемой от реализации питьевой воды в литровых бутылках воспользуемся формулой (4.8).

$$B_{16}=C_{16}\sum_{m=1}^{3} f_{1m6}X_{m5}=C_{16}\cdot[\,f_{116}X_{15}+f_{126}X_{25}+f_{136}X_{35}]=$$

$$=5\cdot[1{,}123841\cdot 52137-1{,}8957515\cdot 5750-1{,}496345\cdot 14100]=5\cdot 26594{,}66=$$

$$=132973{,}3 \text{ руб.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Расчетные формулы для однопродуктовых моделей

Формулы	Однопродуктовые модели	
	Статические	Динамические
1	2	3
Формулы выручки	$B = CX^r$. $B = CX^r \geq S + H$ при $\rho > 0$.	$B_t = \sum_{\tau \in N_t} C_{\tau t} X_{\tau t}$. $B_t = d_t C_t X_t + \sum_{\tau \in N_t \setminus t} C_{\tau t} X_{\tau t}$. $B_t = C_t \left(d_{tt} X_t + \sum_{\tau \in N_t} b_{\tau t} X_{\tau t} \right)$ при $C_{\tau t} = b_{\tau t} C_t$. $B_t = C_t \sum_{\tau \in N_t} b_{\tau t} d_{\tau t} X_\tau$; при $X_{\tau t} = d_{\tau t} X_\tau$. $B_t = C_t \sum_{\tau \in N_t} b_{\tau t} d_{\tau t} r_{\tau t} X_{t-1}$ при $X_\tau = r_{\tau t} X_{t-1}$. $B_t > S_t + H_t + F_t^p = S_t + \alpha P_t + \beta \left(B_t - S_t^c \right) + F_t^p$.
Формулы балансового уравнения	$UX + Z + H + \delta F^p = B + (1 - \delta)\left(C^r + C^b\right)$ –общий вид. $UX + Z + H = B + C^r + C^b$ при $\rho \leq 0$. $UX + Z + H + F^p = B$ при $\rho > 0$. $UX + Z + H = B$ при $\rho = 0$.	$U_t X_t + Z_t + H_t + \delta_t F_t^p = B_t + (1 - \delta_t)\left(C_t^r + C_t^b\right)$ – общий вид. $[1 + \delta_t \rho_t (1 - \alpha)](U_t X_t + Z_t) + H_t = B_t + (1 - \delta_t)\left(C_t^r + C_t^b\right)$. $S_t + \beta\left(B_t - S_t^c\right) = B_t + C_t^r + C_t^b$ при $B_t < S_t$.

Продолжение таблицы 1

1	2	3
Другие формулы	$C^c = U + \frac{Z}{X}$.	$P_T^p = \sum_{t=1}^{T} \left[\delta_t F_t^p - (1-\delta_t) C_t^r\right]$.
	$C = U + \frac{Z}{X} + \frac{P}{X}$.	$H_t = \alpha P_t + \beta \left(B_t - S_t^c\right)$.
	$CX^r \ge (UX + Z) + H$.	$P_t = B_t (1-\beta) - S_t$.
	$X^r \ge \frac{(UX + Z) + H}{C}$.	$\rho_t = \frac{P_t}{S_t}$.
	$S = UX + Z$.	$P_t = \rho_t (U_t X_t + Z_t)$.
	$P = B - S$.	$F_t^p = P_t^p = (1-\alpha) P_t = \rho_t (1-\alpha)(U_t X_t + Z_t)$.
	$\rho = \frac{P}{S}$.	$P_t^p = P_t (1-\alpha)$.
	$C = (1+\rho)(U + Z/X)$.	$F_t^p = P_t^p = (1-\alpha)[B_t (1-\beta) - U_t X_t - Z_t]$.
	$X = \frac{(1+\rho) Z}{C - (1+\rho) U}$.	$C_t^r + C_t^b = S_t - B_t + \beta \left(B_t - S_t^c\right) = S_t - (1-\beta) B_t - \beta S$.

Таблица 2

Расчетные формулы для многопродуктовых моделей

Формулы	Многопродуктовые модели	
	Статические	Динамические
1	2	3
Формулы выручки	$B_j = C_j Y_j.$ $B_j = C_j Y_j = C_j \left(X_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_m \right).$	$B_{jt} = \sum_{\tau \in N_{jt}} C_{j\tau t} Y_{j\tau t}, \quad B_t = \sum_{j=1}^{n} B_{jt}.$ $B_{jt} = C_{jt} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} Y_{j\tau t}$ при $C_{j\tau t} = b_{j\tau t} C_{jt}.$ $B_{jt} = C_{jt} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} d_{j\tau t} Y_{j\tau}$ при $Y_{j\tau t} = d_{j\tau t} Y_{j\tau}.$ $B_{jt} = C_{jt} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} d_{j\tau t} \sum_{m=1}^{n} q_{jm} X_{m\tau}.$ $B_{jt} = C_{jt} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} d_{j\tau t} \sum_{m=1}^{n} q_{jm} r_{m\tau t} X_{m,t-1}$ при $X_{m\tau} = r_{m\tau t} X_{m,t-1}.$ $B_{jt} = C_{jt} \sum_{m=1}^{n} f_{jmt} X_{m,t-1}$ при $f_{jmt} = q_{jm} \sum_{\tau \in N_{jt}} b_{j\tau t} d_{j\tau t} r_{m\tau t}.$

Продолжение таблицы 2

1	2	3
Формулы балансовог о уравнения	$U_jX_j+\xi_jZ+\sigma_jH+\delta_jF_j^p=B_j+(1-\delta_j)(\eta_jC^r+\zeta_jC^b$. $U_jX_j+Z_j+H_j+\delta_jF_j^p=B_j+(1-\delta_j)(C_j^r+C_j^b)$ при ($Z_j=\xi_jZ$, $H_j=\sigma_jH$, $C_j^r=\eta_jC^r$, $C_j^b=\zeta_jC^b$).	Балансовое уравнение (БУ) при $B_t<S_t$ $\quad S_{jt}+H_{jt}=B_{jt}+C_{jt}^r+C_{jt}^b$, где $H_{jt}=\sigma_{jt}H_t$, $C_{jt}^r=\eta_{jt}C_t^r$, $C_{jt}^b=\zeta_{jt}C_t^b$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_{jt}=1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{jt}=1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_{jt}=1$; $\sum\limits_{j=1}^{n}\zeta_{jt}=1$ или $U_{jt}X_{jt}+\xi_{jt}Z_t+\sigma_{jt}H_t=B_{jt}+\eta_{jt}C_t^r+\zeta_{jt}C$ или $U_{jt}X_{jt}+Z_{jt}+H_{jt}=B_{jt}+C_{jt}^r+C_{jt}^b$, j=1, 2,…, n.. при $B_{jt}>S_{jt}$ $\quad S_{jt}+H_{jt}+F_{jt}^p=B_{jt}$.
Другие формулы	$Y_j=X_j-\sum\limits_{m=1}^{n}a_{jm}X_m$. $C_j=\dfrac{U_jX_j+Z_j+H_j+\delta_jF_j^p-(1-\delta_j)(C_j^r+C_j^b)}{X_j-\sum\limits_{m=1}^{n}a_{jm}X_m}$. $(U_j-C_j)X_j+C_j\sum\limits_{m=1}^{n}a_{jm}X_m=w_j$	Затраты на выпуск j-го продукта: $S_{jt}=U_{jt}X_{jt}+Z_{jt}$. Общие затраты: $S_t=\sum\limits_{j=1}^{n}U_{jt}X_{jt}+Z_t$ при $Z_t=\sum\limits_{j=1}^{n}Z_{jt}$. Переменные затраты

	при $$w_j = (1-\delta_j)(C_j^r + C_j^b) - Z_j - H_j - \delta_j F_j^p.$$ $$\sum_{m=1}^{n} v_{jm} X_m = w_j$$ при $$v_{jm} = \begin{cases} U_j + (a_{jj}-1)C_j & \text{при} \quad m = j \\ C_j a_{jm} & \text{при} \quad m \neq j \end{cases}.$$	$$U_{jt} = \sum_{m=1}^{N_j} C_{jmt} q_{jm} + C_{jt}^{з}\left(1 + \sum_{k=1}^{3}\beta_k\right) - C_{jt}^{в}.$$ Чистый выпуск $$Y_{j\tau} = X_{j\tau} - \sum_{m=1}^{n} a_{jm} X_{m\tau} = \sum_{m=1}^{n} q_{jm} X_{m\tau},$$ при $q_{jm} = 1 - a_{jj}$ для $m = j$, $q_{jm} = -a_{jj}$ для $m \neq j$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. – М.:ИНФРА-М, 1997. – 160 с.
2. Большаков А.С. Моделирование в менеджменте. Учебное пособие. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», Рилант, 2000. – 464 с.
3. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.
4. Войнов И.В., Пудовкина С.Г., Телегин А.И. Моделирование экономических систем и процессов. Опыт построения ARIS-моделей: Монография. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2002. – 392 с.
5. Войнов И.В., Телегин А.И. Основы экономики и интегрированных информационных систем. Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. – 114 с.
6. Войнов И.В., Телегин А.И. Математические модели в экономике. Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. – 91 с.
7. Гаспариан М.С. Некоторые вопросы практического применения информационных технологий в экономике и управлении: Методическое пособие. – М.: МЭСИ, 2000. – 89 с.
8. Данилина Н.И., Лагоша Б.А. Экономико-математическое моделирование: Методическое указание для студентов-заочников. – М.: Издательство МЭСИ, 2000. – 62 с.
9. Жданов С.А. Основы теории экономического управления предприятием: Учебник. – М: Финпресс, 2000. – 176 с.
10. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1998. – 368 с.
11. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей / Учеб.-практ. пособие. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 246 с.
12. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
13. Криничанский К.В. Финансовая математика: Тексты лекций / Челяб. Гос.ун-т. Челябинск, 2001. – 147 с.
14. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.: Дело, 1998. – 304 с.
15. Лагоша Б.А. Курс лекций по программе кандидатского минимума по специальности 08.00.13 «Экономико-математические методы»: Пособие для аспирантов и соискателей / Московский государственные университет экономики, статистики и информатики. – М., 1999. – 160 с.

16. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика / пер. с англ. Предисловие и науч. ред. А.Г. Гранберг. – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 22 с.
17. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирование в экономике: Часть III. Экономические приложения: Учебное пособие / В.И. Мажукин. – М.: Флинта: Московский гуманитарный университет, 2004. – 176 с.
18. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247 с.
19. Применение информационных технологий в экономике: Учебно-методическое пособие / М.С. Гаспариан, Г.Н. Лихачева, С.В. Григорьев, и др. // Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М.: МЭСИ, 2000. – 49 с.
20. Салин В.Н., Ситникова О.Ю. Техника финансово-экономических расчетов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 80 с.
21. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие. – М.: Издательство БЕК, 1998. – 141 с.
22. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, BusinessРечь, 1992. – 320 с.
23. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. – М.: Дело, 1998. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ